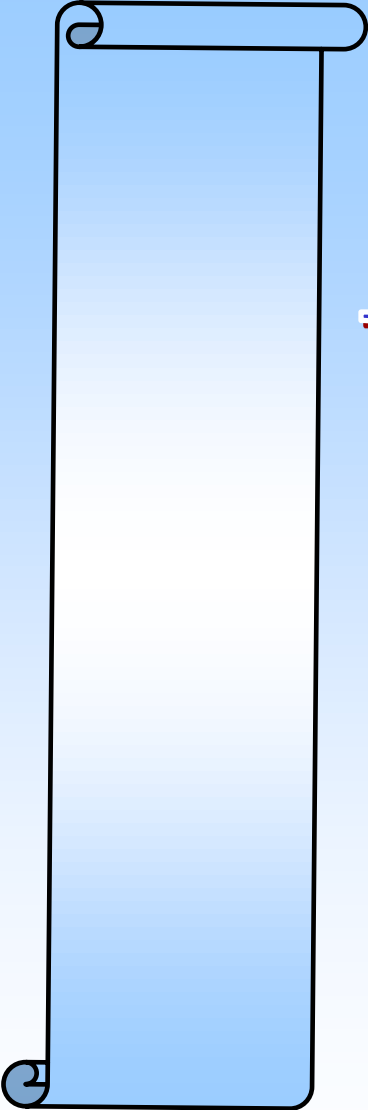




Układy sił



M E N U

INFORMACJA

**SIŁA I JEJ
WŁAŚCIWOŚCI**

RODZAJE SIŁ

UKŁADY SIŁ

Pojęcia podstawowe

**RZUTOWANIE
SIŁ**

**WYPADKOWA
UKŁADU SIŁ**

**RÓWNOWAGA
UKŁADU SIŁ**

ZADANIA

DŹWIGNIE

WYJŚCIE



D

Z

I

A

Ł

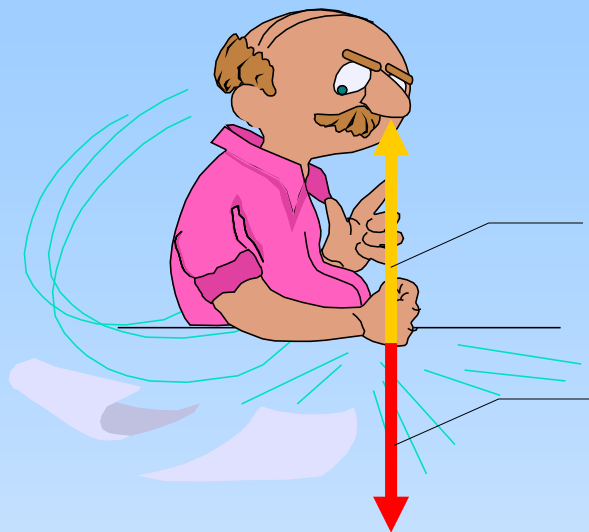
1

SIŁA I JEJ WŁAŚCIWOŚCI



Siła jako wektor

Siła to mechaniczne oddziaływanie jednego ciała na drugie.



Nacisk stołu na rękę.

Nacisk ręki na stół.

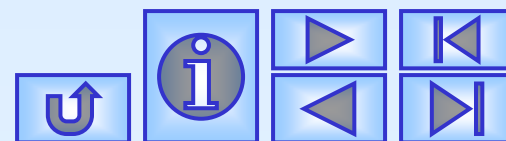
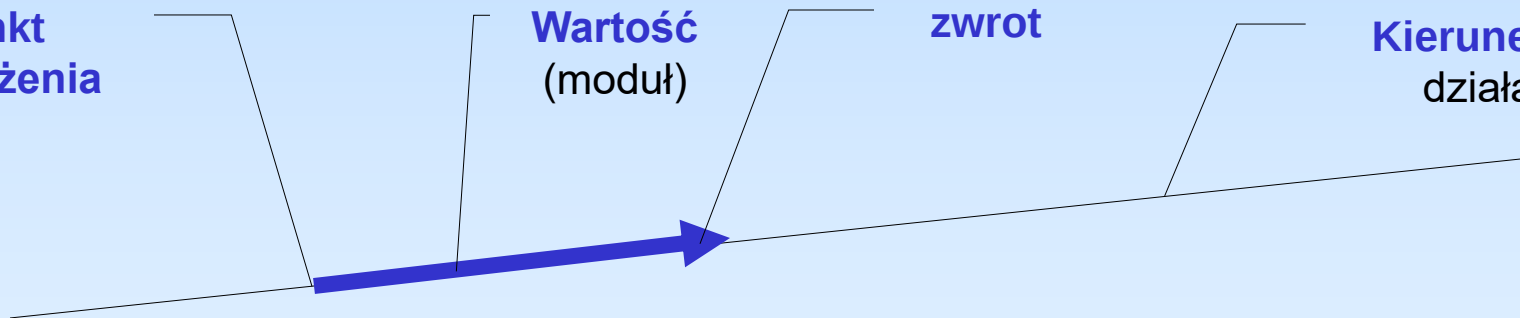
Cechy siły:

Punkt przyłożenia

Wartość (moduł)

zwrot

Kierunek (linia działania)



Jednostka wartości siły

W układzie SI wartość siły wyrażana jest w **niutonach** (symbol **N**).

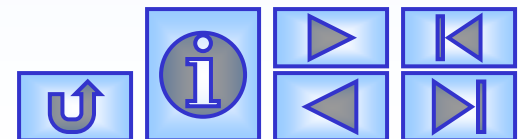
$$1\,N = 1\,kg \cdot 1\,\frac{m}{s^2}$$

➡ Jeden niuton to wartość siły, która masie jednego kilograma nadaje przyspieszenie jednego metra na sekundę do kwadratu.

Pochodne jednostki:

⚙ kiloniuton $1kN = 1 \cdot 10^3\,N$

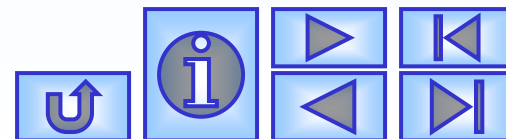
⚙ meganiuton $1MN = 1 \cdot 10^6\,N$



Pojęcia podstawowe

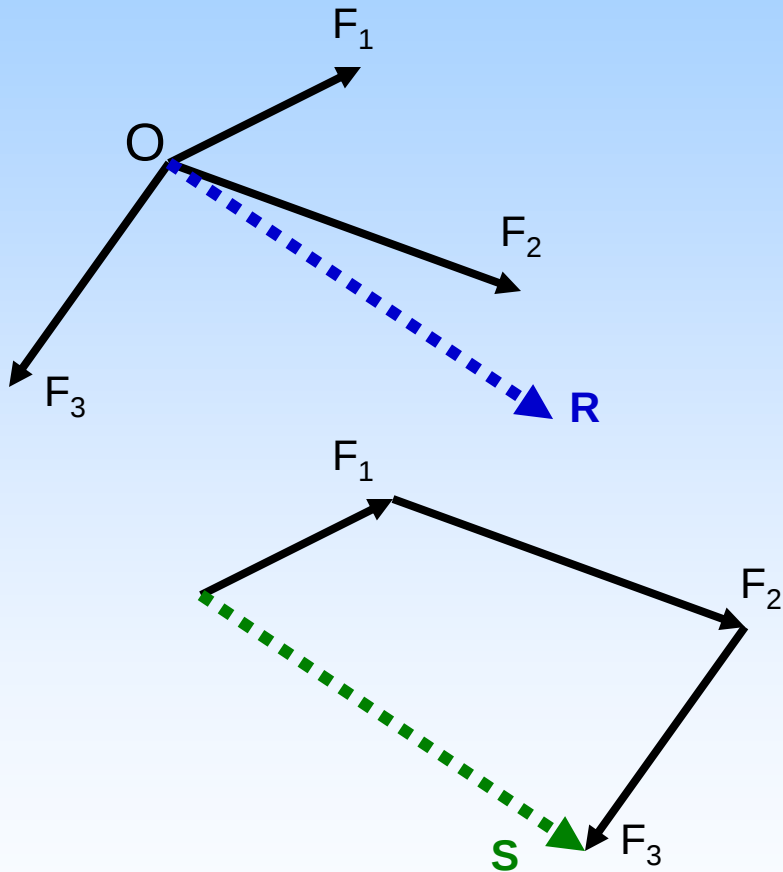
Opisując zjawiska fizyczne posługujemy się modelami:

- Punkt materialny – ciało którego wymiary można pominąć w opisie ruchu
- Bryła sztywna – zbiór wielkiej liczby punktów materialnych znajdujących się w stałej niezmienniej odległości
- Tor ruchu – linia krzywa lub prosta po której odbywa się ruch
- Droga s – długość toru (skalar)
- Δr – przemieszczenie (wektor)
- W postaci wektorowej kinematyczne równanie ruchu jest zależnością określającą wektor położenia ciała jako funkcję czasu $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$; $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{j}$
- Eliminując czas otrzymujemy równanie toru

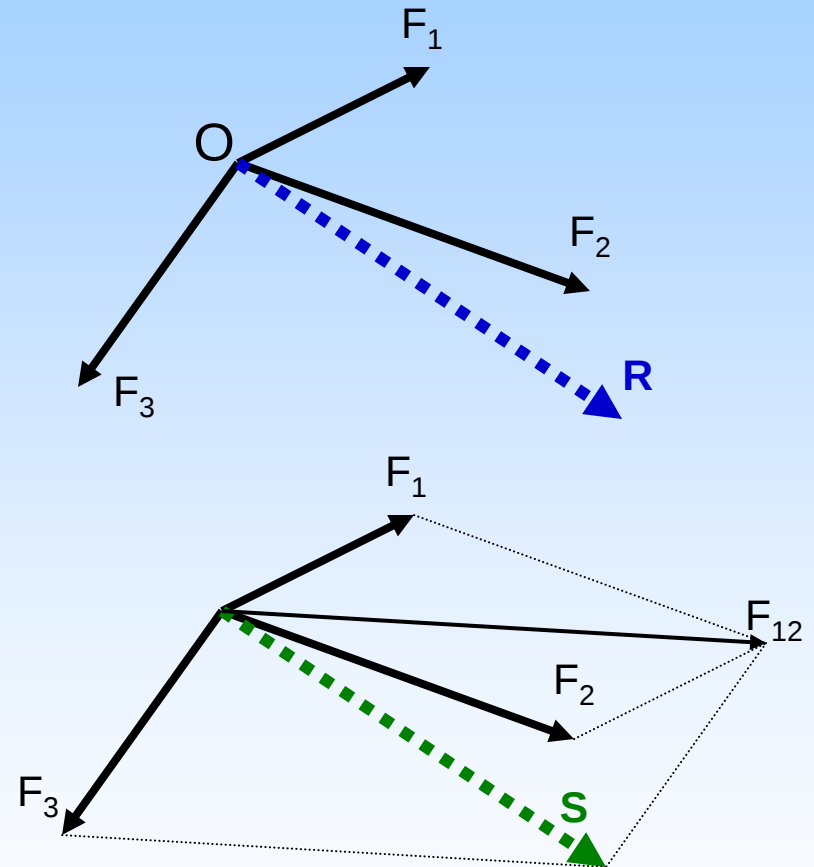


Składanie sił.

Wielobok sił:

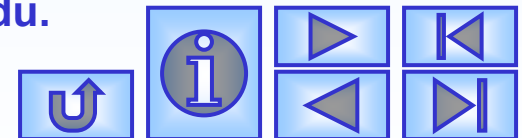


Równoległobok sił:



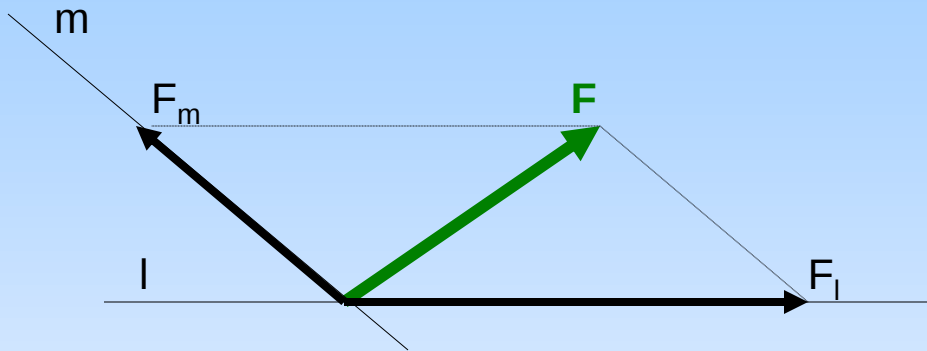
R - wypadkowa układu sił, która zastępuje działanie tego układu.

S - suma układu sił



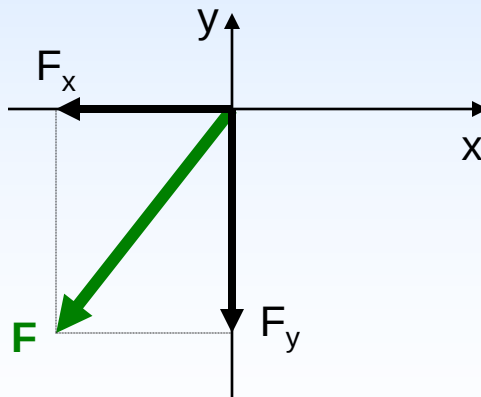
Rozkład siły na składowe

...o kierunkach prostych l, m

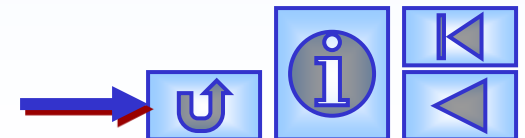


➡ F_l, F_m - składowe siły F na zadanych kierunkach l, m .

...o kierunkach osi x, y

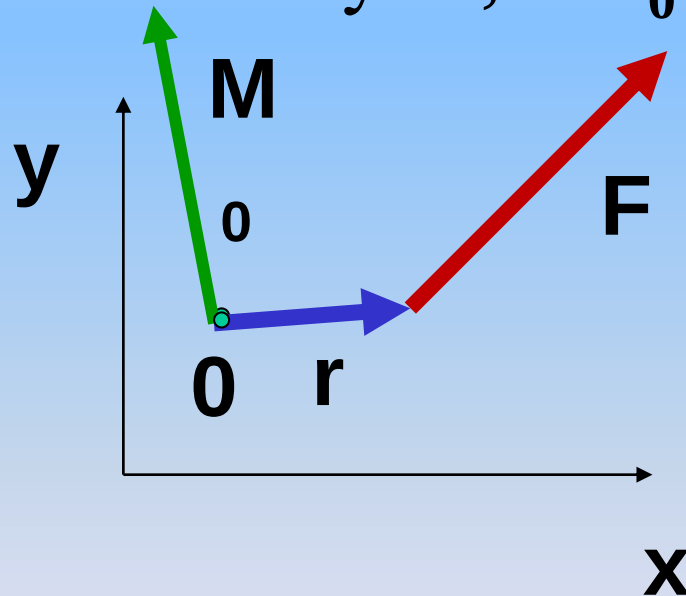


➡ F_x, F_y - składowe siły F na osiach x, y .

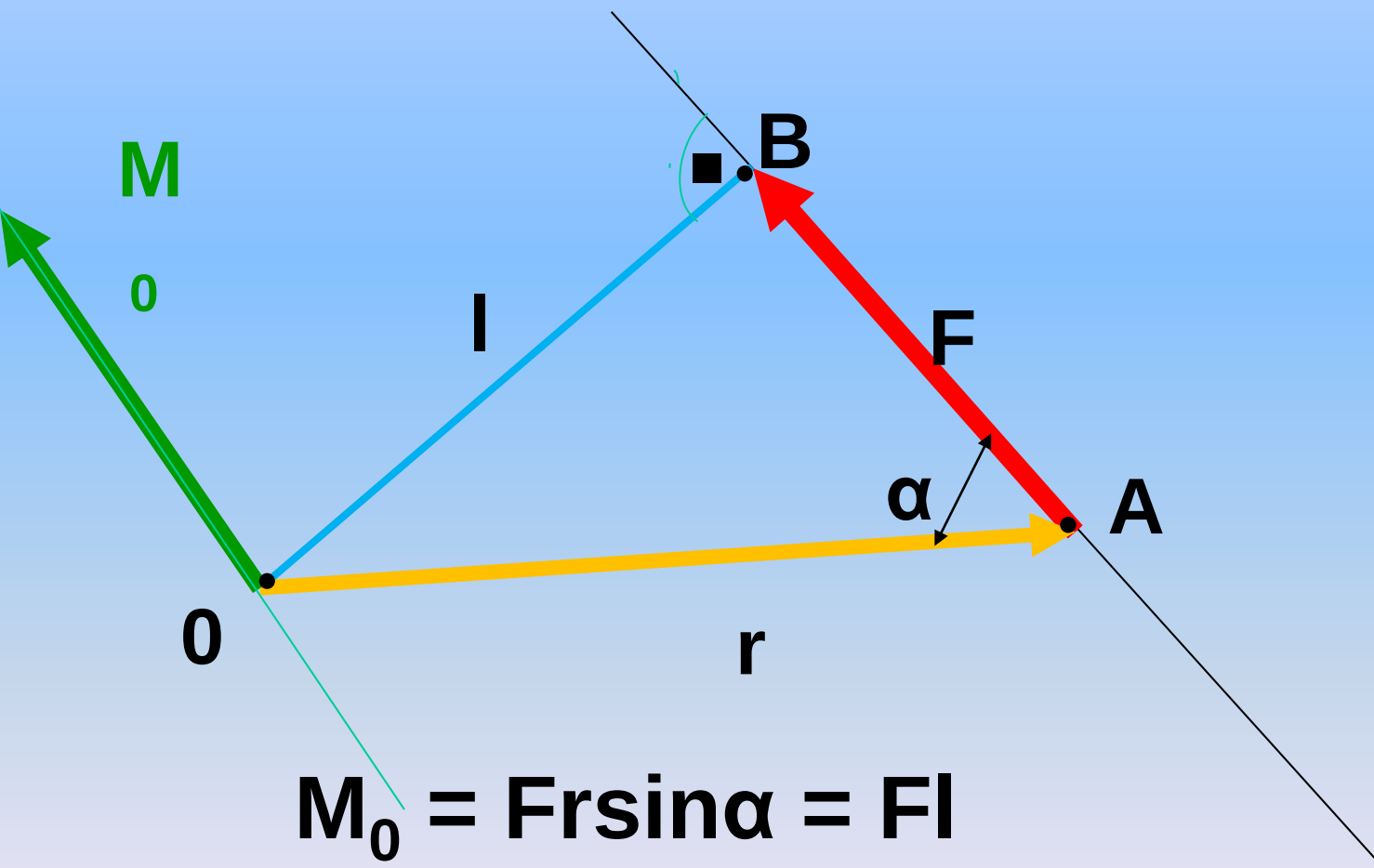


Moment siły

- Momentem siły $\mathbf{F}$ względem punktu $\mathbf{0}$ nazywamy odłożony z punktu $\mathbf{0}$ wektor $\mathbf{M}_0$ równy iloczynowi wektorowemu promienia wektora $\mathbf{r}$ i wektora siły $\mathbf{F}$; $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$



Moment siły



$$M_0 = Fr \sin \alpha = Fl$$

l – ramię działania siły

DZIAŁ 2

Rodzaje sił

Podział sił

SIŁY MECHANICZNE

ZEWNĘTRZNE

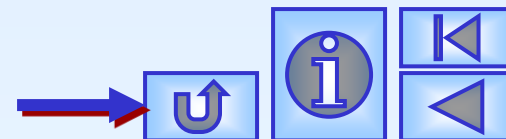
WEWNĘTRZNE

CZYNNE

REAKCJE

**MIĘDZY
CZĄSTE
CZKOWE**

NAPIĘCIA



**D
Z
I
A
Ł
3**

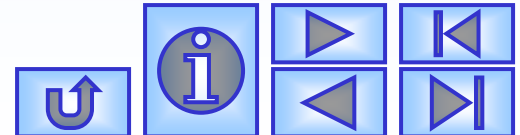
Układy sił



Zasady statyki (aksjomaty)

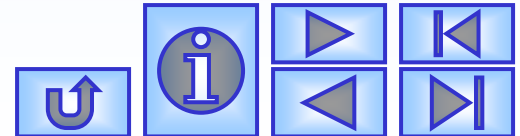
Zasada równoległoboku:

- ❖ Działanie dwóch sił F_1 i F_2 można zastąpić działaniem jednej siły R
- ❖ Jeżeli do ciała przyłożone są dwie siły to równoważą się one tylko wtedy, gdy mają tę samą linię działania, te same wartości i przeciwne zwroty
- ❖ Skutek działania dowolnego układu sił przyłożonego do ciała nie zmieni się jeżeli dodamy lub odejmiemy dowolny układ sił równoważących się (układ zerowy)



Zasady statyki (aksjomaty) Cd

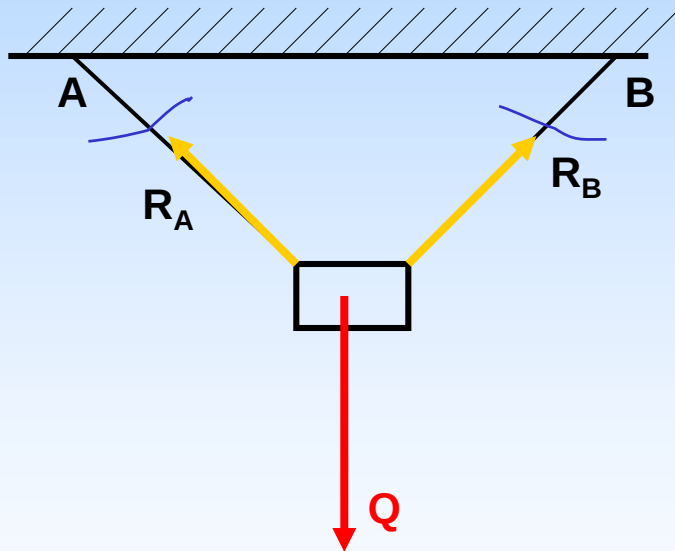
- ❖ Jeżeli ciało odkształcalne znajduje się w równowadze pod działaniem pewnego układu sił, to również pozostanie w równowadze ciało doskonale sztywne (nieodkształcalne) identyczne z poprzednim, pod działaniem tego samego układu sił.
- ❖ Każdemu działaniu towarzyszy równe co do wartości o przeciwnym zwrocie i leżące na tej samej prostej przeciwdziałanie.
- ❖ Każde ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić z więzów, zastępując ich działanie reakcjami, a następnie rozpatrywać jako ciało swobodne, znajdujące się pod działaniem sił czynnych i biernych



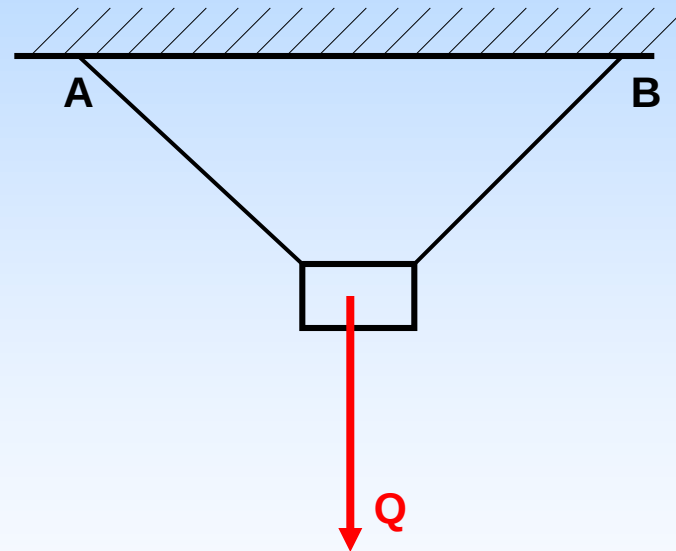
Układ sił

Układ sił to zbiór sił czynnych i biernych (reakcji) działających jednocześnie na ciało oswobodzone.

⇒ **Oswobodzić ciało** tzn. usunąć podpory (więzy), a w ich miejsce wprowadzić reakcje.

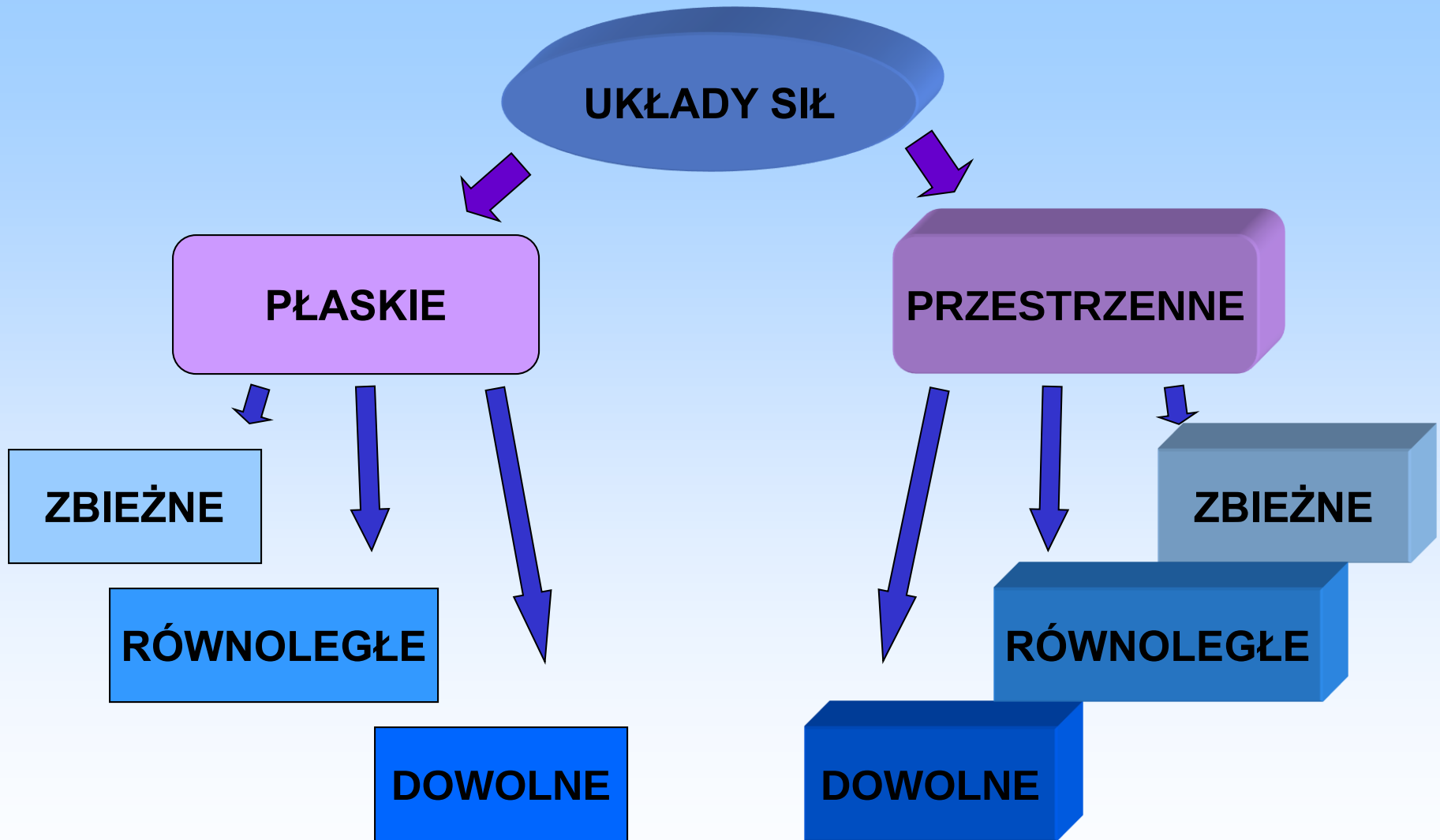


Ciało oswobodzone.



Ciało nieswobodne.

Podział układów sił.



D

Z

I

A

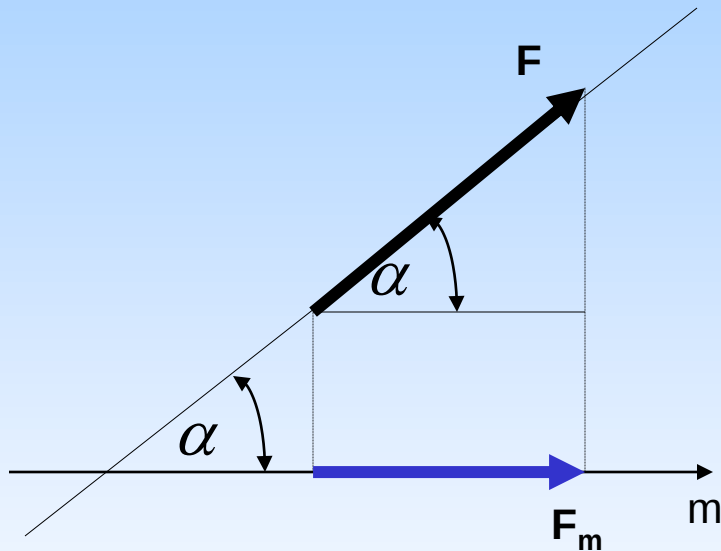
Ł

4

Rzutowanie sił



Rzut siły na oś.

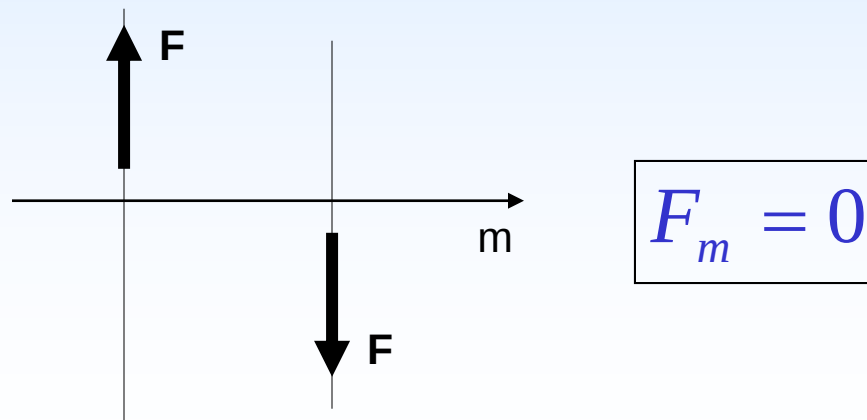
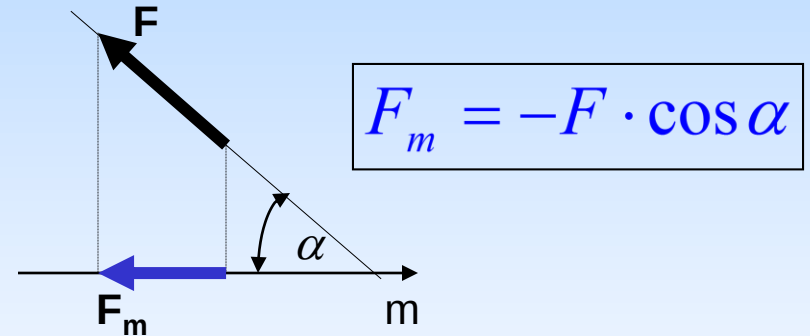
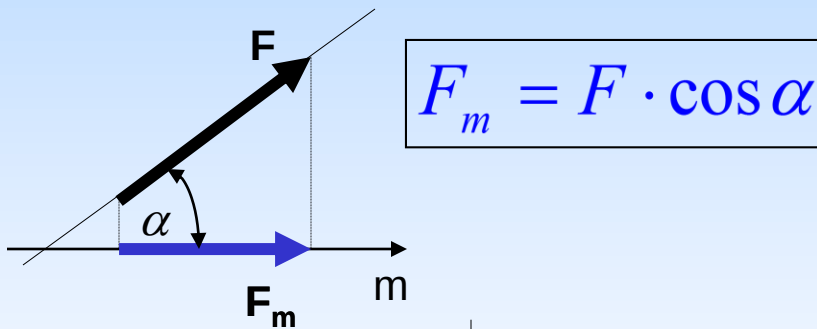
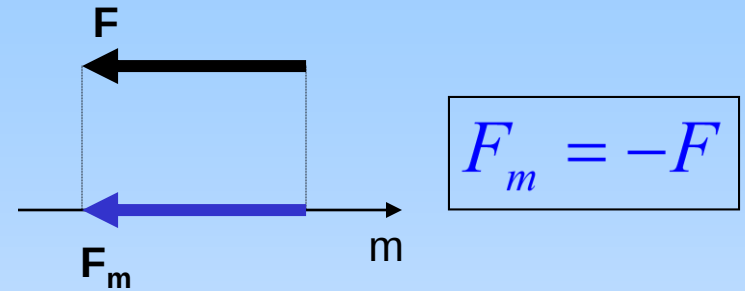
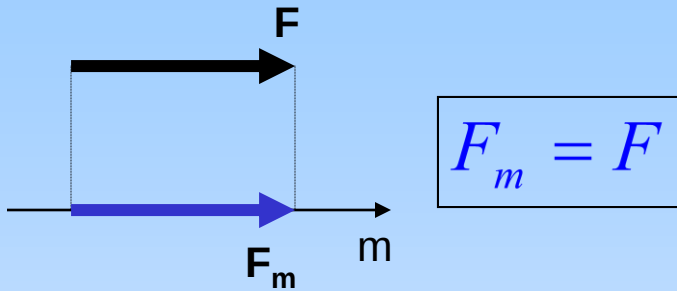


➡ **Rzutek siły na oś (F_m)**
nazywamy wektor łączący rzut
początku z rzutem końca
wektora danej siły na tę oś.

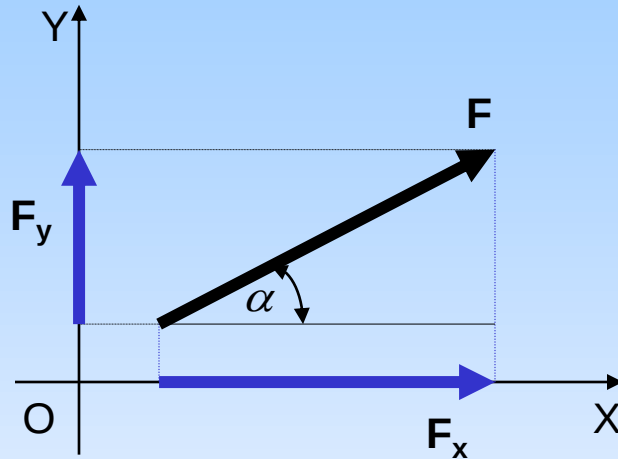
➡ **Wartość F_m :**

$$F_m = F \cdot \cos \alpha$$

Szczególne przypadki rzutów siły na oś.



Rzut siły na osie x, y.



Wartość rzutów siły F
na osie x i y :

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

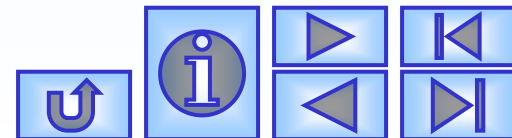
$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

Rzuty **siły F** na osie x i y określają jednoznacznie jej:

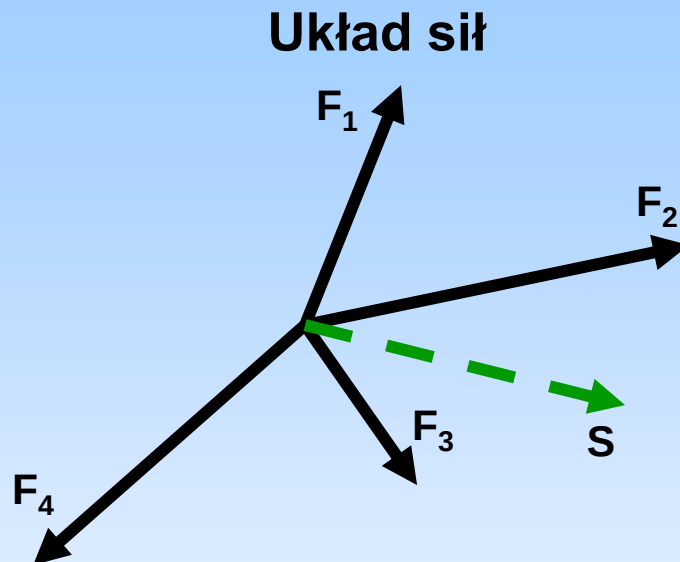
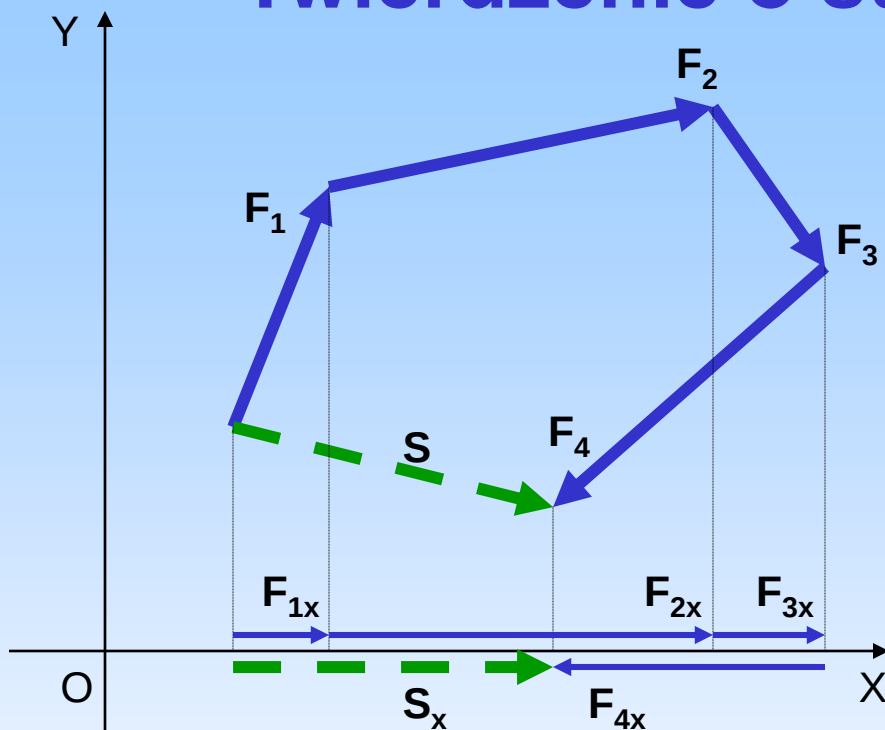
➡ **wartość:** $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

➡ **kierunek:** $\cos \alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$

➡ **zwrot:** uwzględniając znaki (+,-) rzutów F_x i F_y określa się, w stronę której ćwiartki układu x,y zwrócona jest siła F .



Twierdzenie o sumie rzutów sił.



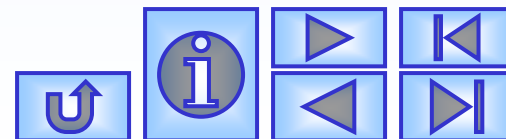
➡ Suma rzutów dowolnej liczby sił na oś jest równa rzutowi sumy tych sił na tę samą oś.

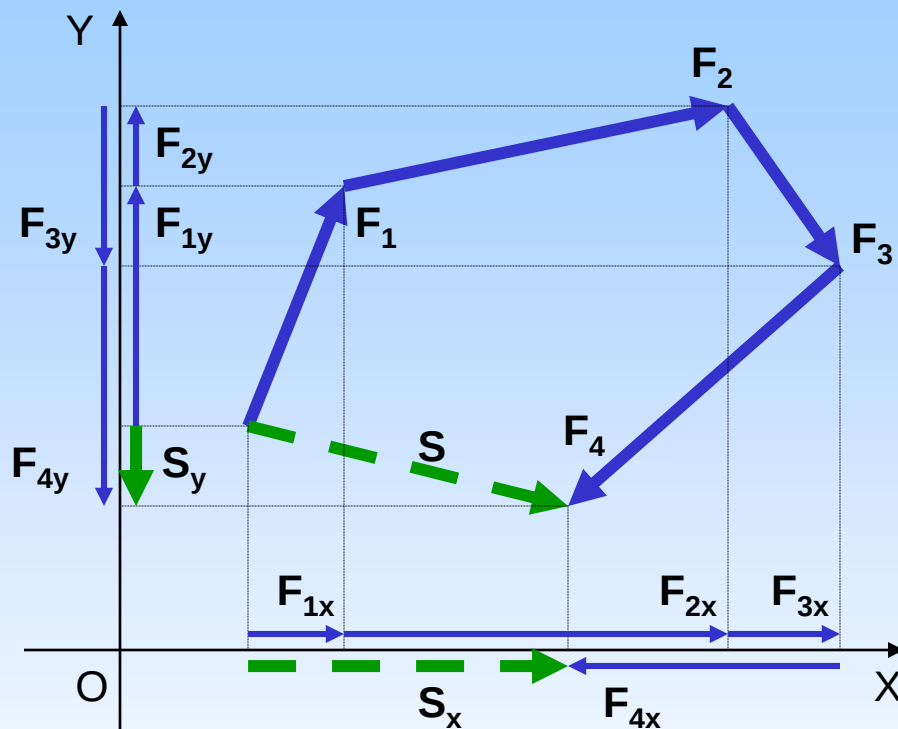
$$S_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{nx}$$

$$S_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny}$$

Pomoc

!!! Dorysuj rzuty sił na oś y.

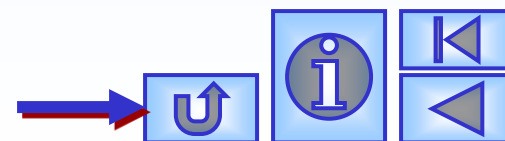




Czy Twój rysunek odpowiada obrazowi na osi y?

tak

nie



D

Z

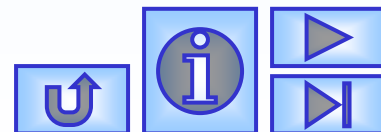
I

A

Ł

5

Wypadkowa układu sił



Wypadkowa płaskiego zbieżnego układu sił.

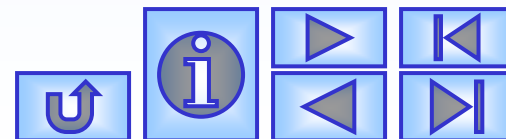
Istnieją dwie metody wyznaczania wypadkowej płaskiego zbieżnego układu sił:

⊗ *metoda analityczna*

⊗ *metoda wykreślna*

W metodzie wykreślnej można posłużyć się **wielobokiem** lub **równoległobokiem sił**. Oba sposoby zostały przedstawione na slajdzie „Składanie sił” w dziale „Siła i jej własności”.

Pokaż



Analityczna metoda

wyznaczania wypadkowej płaskiego zbieżnego układu sił.

Kolejność działań:

- ✿ przez punkt zbieżności O poprowadzić **osie x,y**
- ✿ obliczyć **wartość rzutów wypadkowej** na osie x,y

$$R_X = F_1 \cdot \cos \alpha_1 - F_2 \cdot \cos \alpha_2$$

$$R_Y = F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 - F_3$$

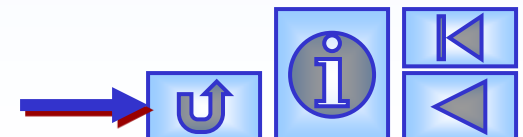
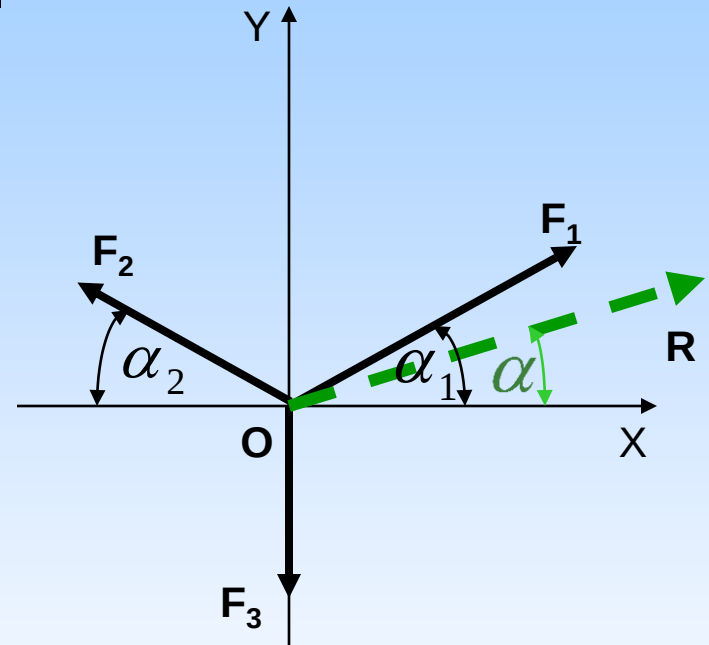
- ✿ obliczyć **wartość wypadkowej R**

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$$

- ✿ określić **kierunek wypadkowej R**, odczytując z tablic wartość kąta α

$$\cos \alpha = \frac{R_X}{R}$$

- ✿ określić **zwrot wypadkowej R** według znaków jej rzutów R_x i R_y .



D

Z

I

A

Ł

6

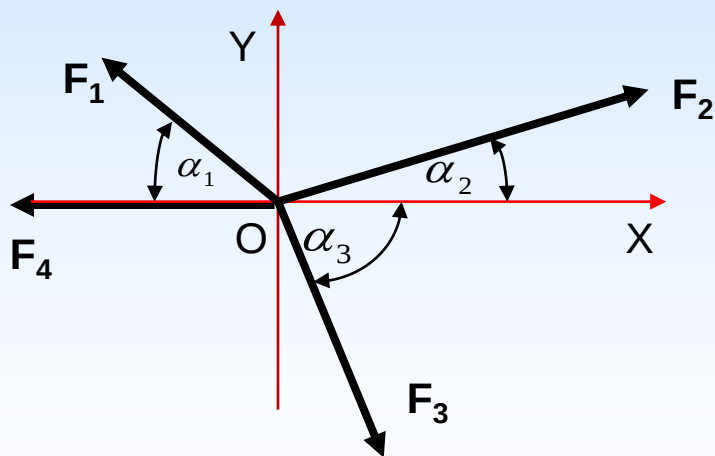
Równowaga układu sił

Analityczne warunki równowagi

płaskiego zbieżnego układu sił.

Płaski zbieżny układ sił jest w równowadze, jeżeli **punkt materialny** będący pod jego działaniem pozostaje w **spoczynku** tzn. wypadkowa **R** tego układu ma wartość **0**.

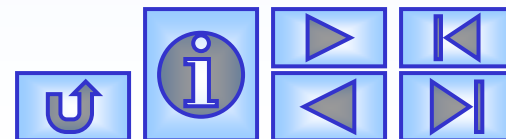
- ➡ Suma algebraiczna rzutów wszystkich sił na oś x jest równa zero.
- ➡ Suma algebraiczna rzutów wszystkich sił na oś y jest równa zero.



$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 + F_3 \cdot \cos \alpha_3 - F_4 = 0 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 - F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

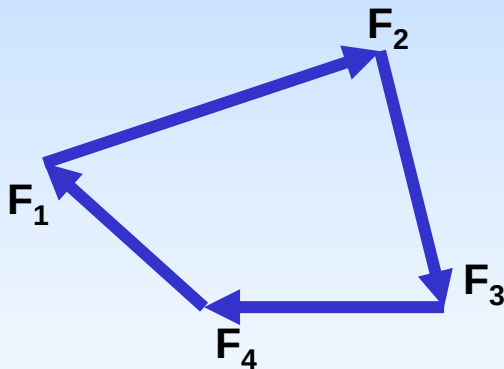
Zrównoważony układ sił.



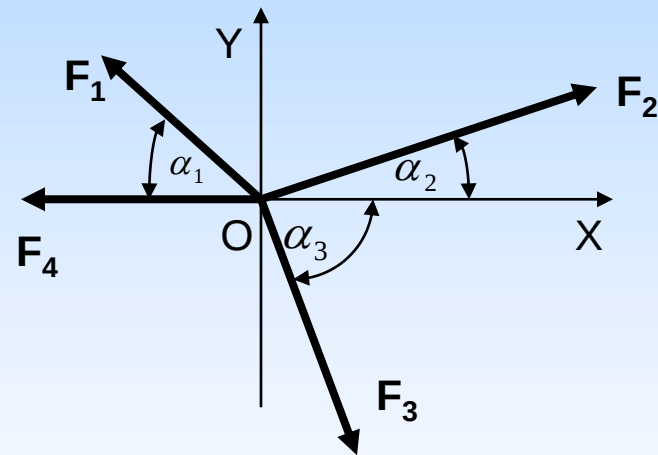
Wykreślny warunek równowagi

płaskiego zbieżnego układu sił.

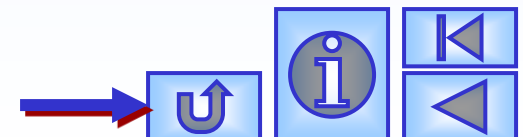
Płaski zbieżny układ sił jest w równowadze, jeżeli wielobok sił tego układu jest zamknięty.



Zamknięty wielobok sił.



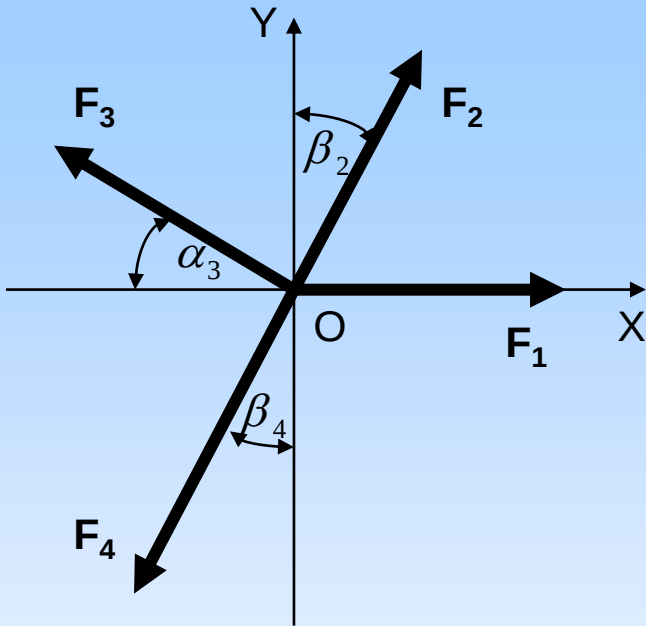
Zrównoważony układ sił.



**D
Z
I
A
Ł
7**

Zadania

Zadanie 1



Wskaż równania, które są poprawnie zapisanymi warunkami równowagi danego układu sił.

Rzuty na **oś x**:

$$F_1 + F_2 \cdot \cos \beta_2 - F_3 \cdot \cos \alpha_3 - F_4 \cdot \cos \beta_4 = 0$$

☐ tak ☐ nie

$$F_1 + F_2 \cdot \sin \beta_2 - F_3 \cdot \cos \alpha_3 - F_4 \cdot \sin \beta_4 = 0$$

☐ tak ☐ nie

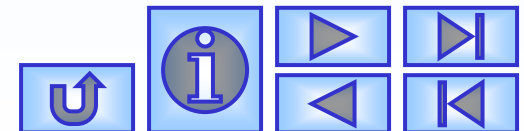
Rzuty na **oś y**:

$$F_2 \cdot \cos \beta_2 + F_3 \cdot \cos \alpha_3 - F_4 \cdot \sin \beta_4 = 0$$

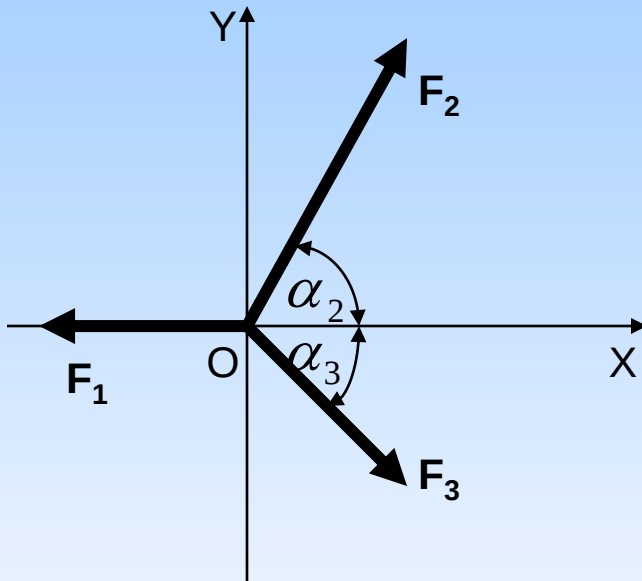
☐ tak ☐ nie

$$F_2 \cdot \cos \beta_2 + F_3 \cdot \sin \alpha_3 - F_4 \cdot \cos \beta_4 = 0$$

☐ tak ☐ nie



Zadanie 2



1. Oceń poprawność zapisu rzutów wypadkowej R układu sił na osie :

$$R_X = -F_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 + F_3 \cdot \cos \alpha_3$$

☐ tak

☐ nie

$$R_Y = F_2 \cdot \cos \alpha_2 - F_3 \cdot \sin \alpha_3 + F_1$$

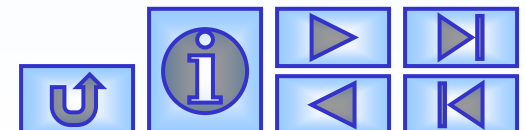
☐ tak

☐ nie

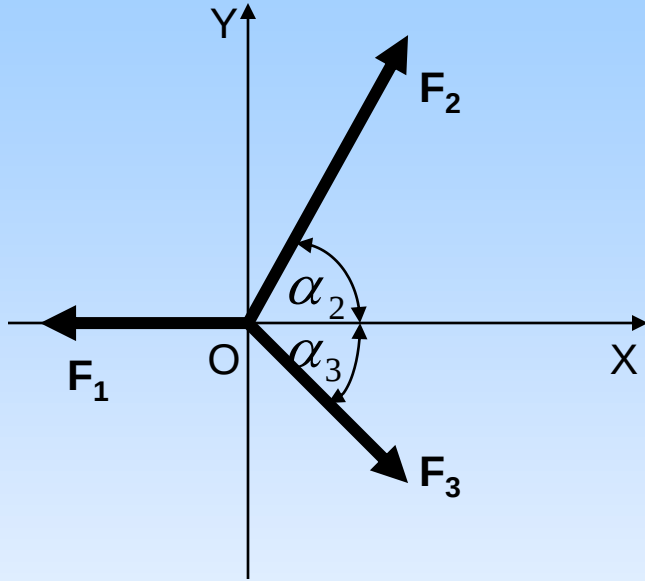
2. Narysuj wielobok sił (Menu podręczne → pióro) i oceń czy układ sił jest w równowadze (Menu podręczne → strzałka):

☐ tak

☐ nie



Odpowiedzi do zadania 2

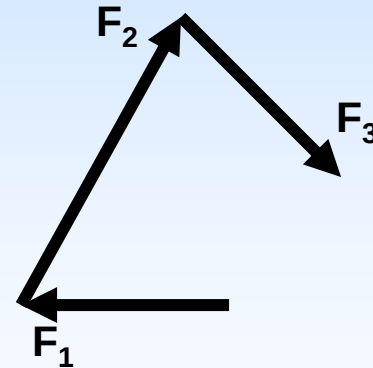


1. Równania rzutów wypadkowej R układu na osie x, y:

$$R_X = -F_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 + F_3 \cdot \cos \alpha_3$$

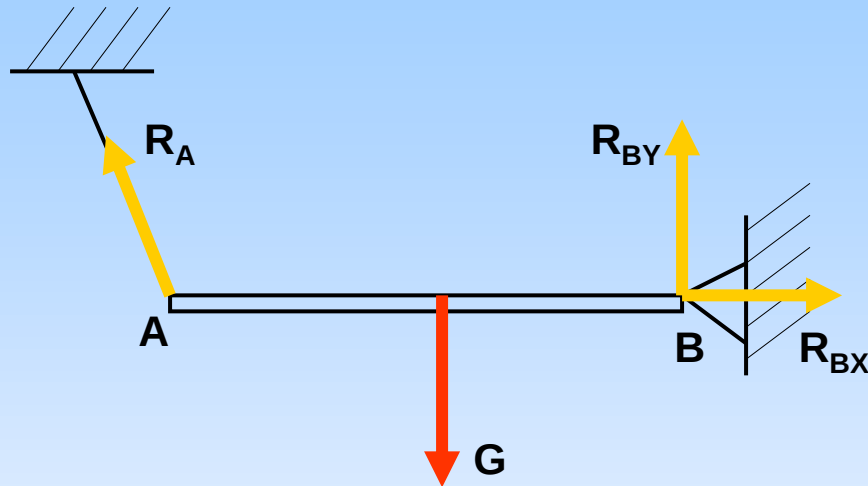
$$R_Y = F_2 \cdot \sin \alpha_2 - F_3 \cdot \sin \alpha_3$$

2. Wielobok sił jest otwarty - układ sił nie jest w stanie równowagi.



Zadanie 3

Czy poprawnie przedstawiono reakcje w podporach?

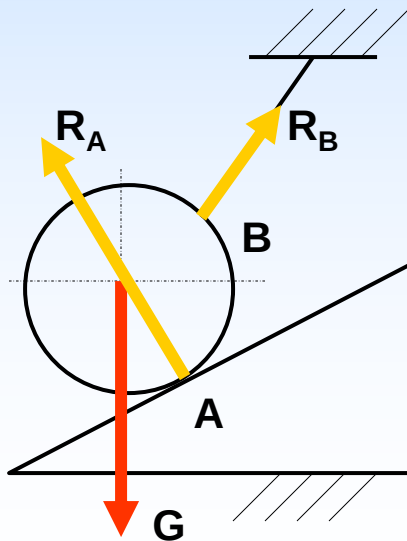


Podpora A:

Podpora B:

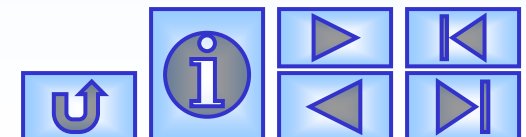
1.

2.



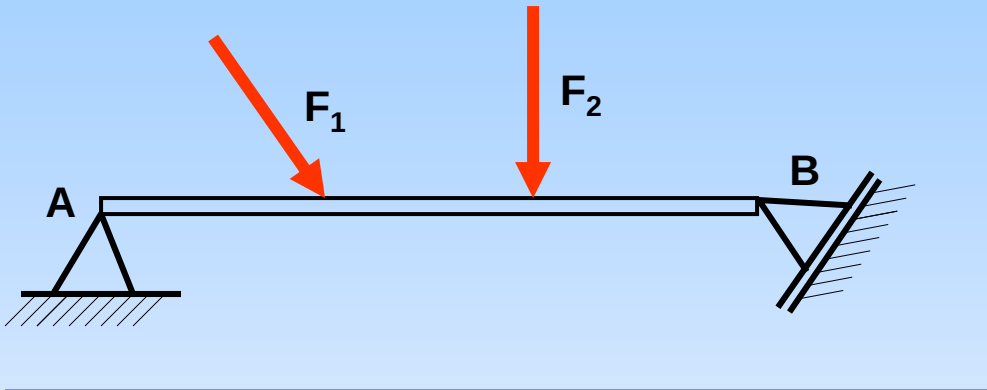
Podpora A:

Podpora B:



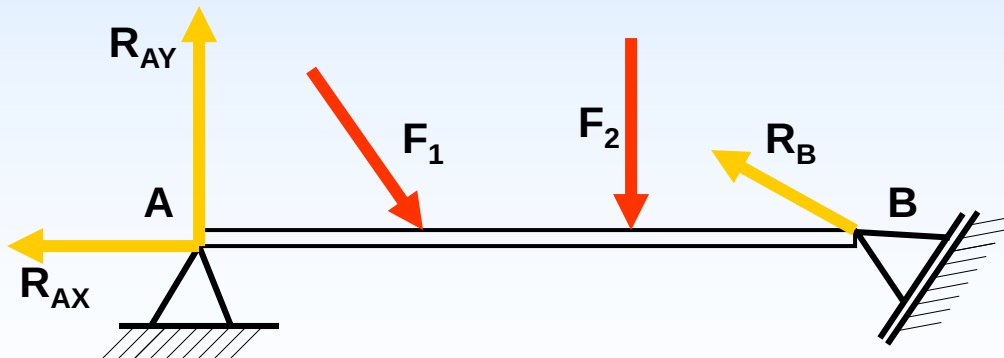
Zadanie 4 A

Dorysuj reakcje w podporach. (Memu podręczne → opcje wskaźnika → kolor pióra → żółty)



Pokaż odpowiedź

Czy tak przedstawiłeś reakcje w podporach?



⚙️ **Podpora A:**

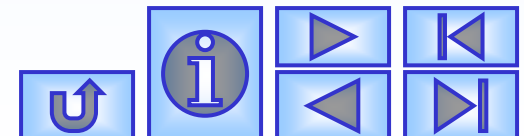
tak

nie

⚙️ **Podpora B:**

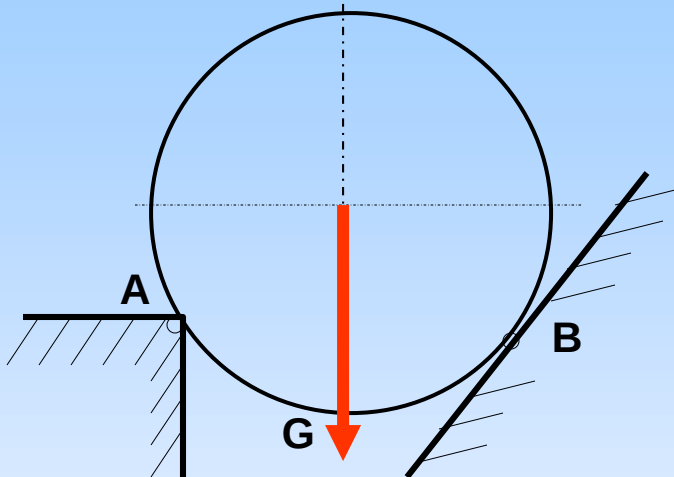
tak

nie



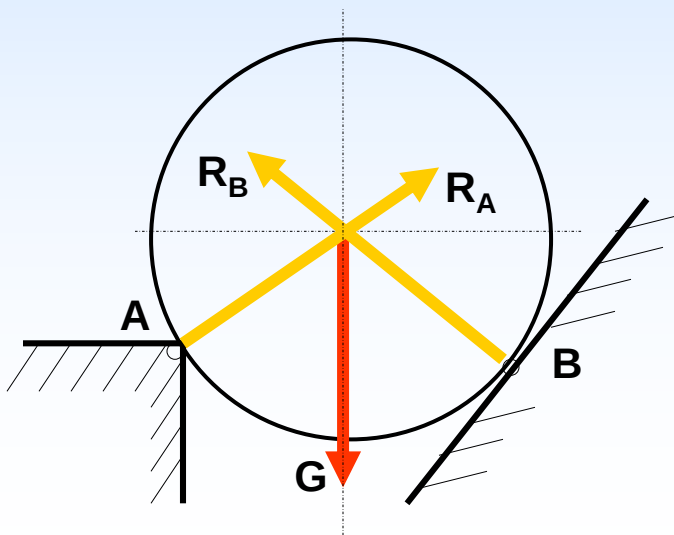
Zadanie 4 B

Dorysuj reakcje w podporach. (Memu podręczne → opcje wskaźnika → kolor pióra → żółty)



Pokaż odpowiedź

Czy tak przedstawiłeś reakcje w podporach?



⚙️ **Podpora A:**

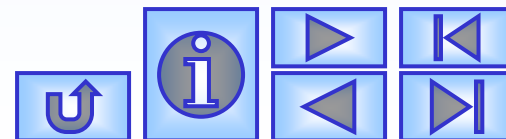
tak

nie

⚙️ **Podpora B:**

tak

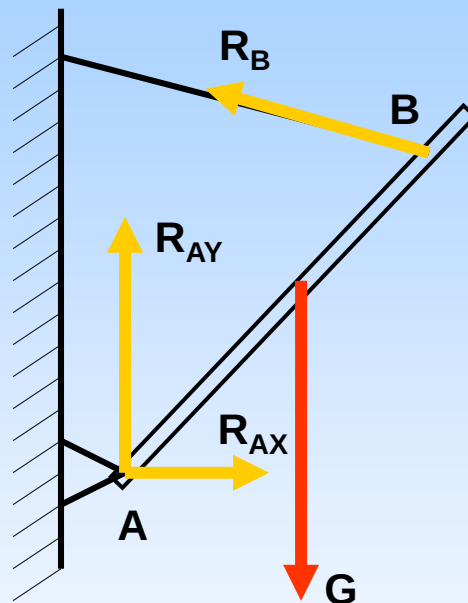
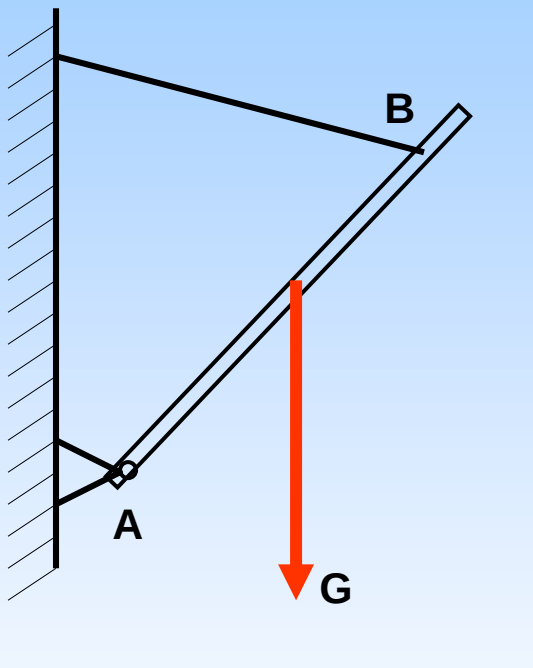
nie



Zadanie 4 C

Dorysuj reakcje w podporach.

(Memu podręczne → opcje wskaźnika →
kolor pióra → żółty)



**Czy tak przedstawiłeś
reakcje w podporach?**

⚙️ **Podpora A:**

tak

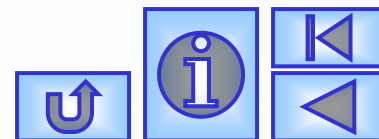
nie

⚙️ **Podpora B:**

tak

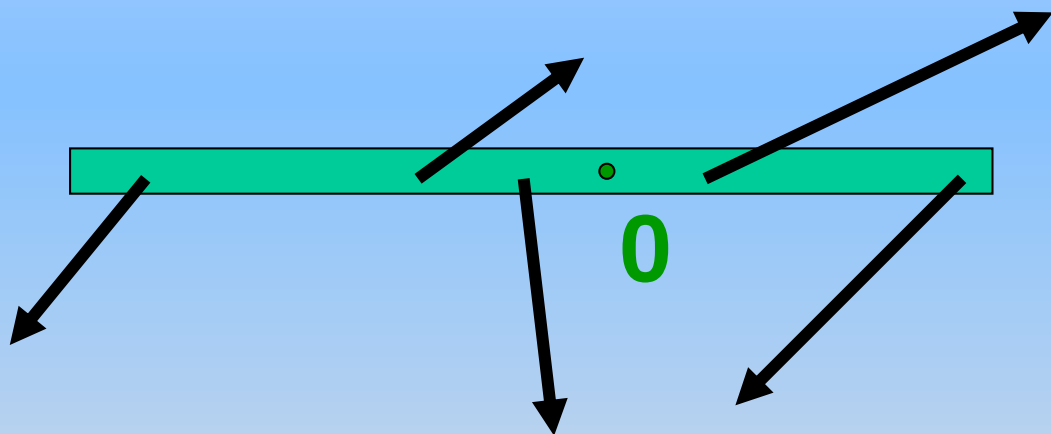
nie

Pokaż odpowiedź



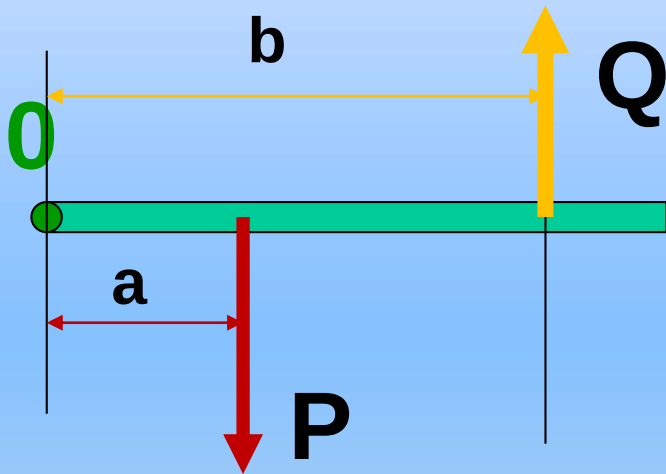
Dźwignie

- **Dźwignia jest to sztywna belka, mogąca obracać się dookoła osi 0**

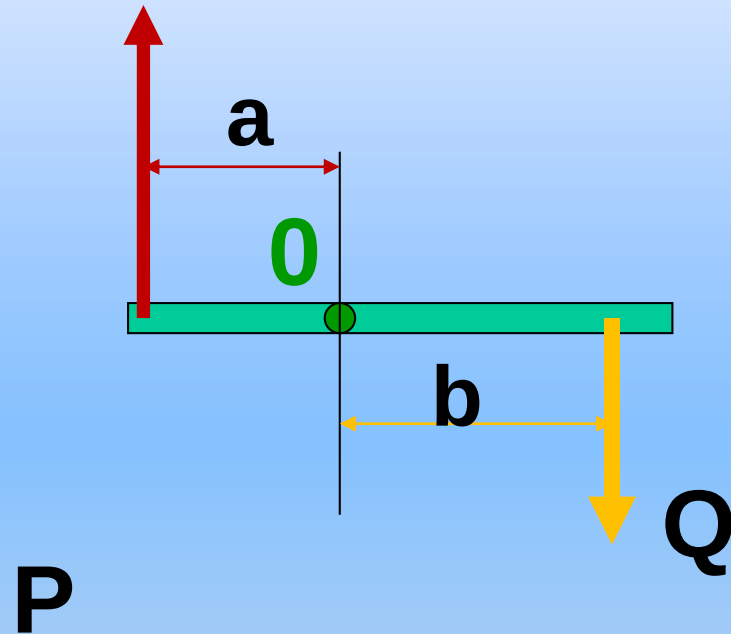


$$\sum_{k=1}^n M_k = 0$$

Dźwignie



Dźwignia jednostronna



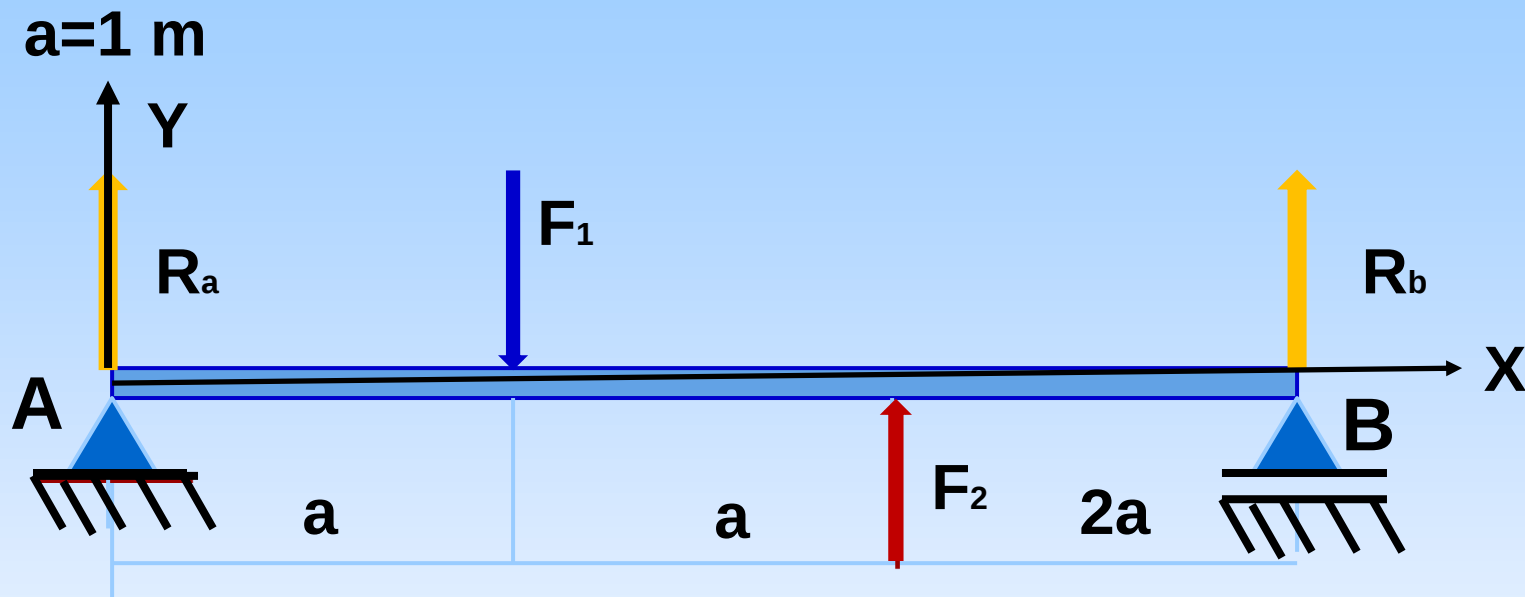
Dźwignia dwustronna

$$Pa - Qb = 0; \text{ czyli } Pa = Qb$$

Jeżeli P jest siłą z jaką działamy,
a Q siłą którą pokonujemy to zysk mechaniczny Z :

$$Z = \frac{Q}{P}$$

$F_1=60 \text{ KG}$ **Zadanie** Oblicz reakcje w punktach A i B
 $F_2=10 \text{ KG}$ i momenty gnące



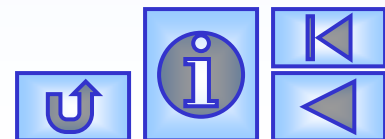
$$\Sigma F_Y = 0$$

$$R_a - F_1 + F_2 + R_B = 0$$

$$R_B = F_1 - R_a - F_2$$

$$R_B = 60 \text{ KG} - 10 \text{ KG} - R_A$$

$$\Sigma M_A = F_1 a - F_2 2a - R_B 4a$$



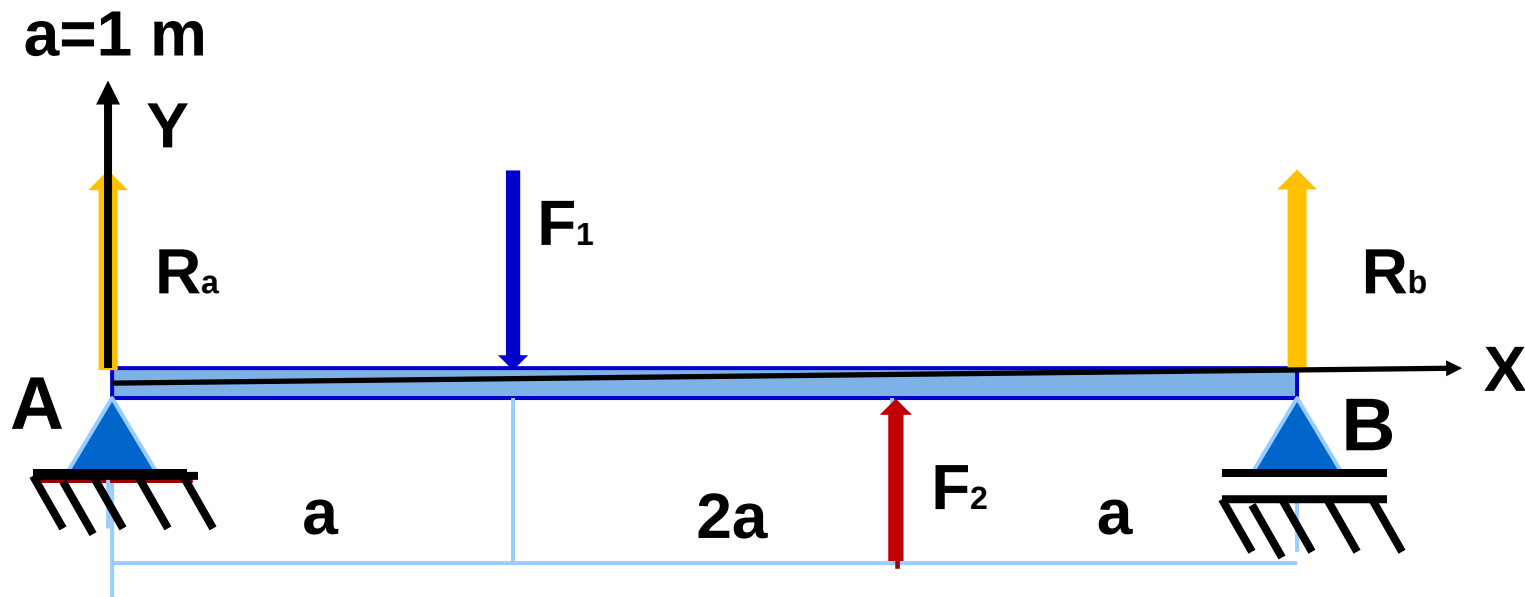
$$\Sigma M_A = F_1 a - F_2 2a - R_B 4a$$

$$R_B 4a = F_1 a - F_2 2a / 4a$$

$$R_B = \frac{F_1 a - F_2 2a}{4a}$$

$$R_A = F_1 - R_B - F_2$$

$F_1=600 \text{ KG}$ **Zadanie2** Oblicz reakcje w punktach A i B
 $F_2=100 \text{ KG}$ i momenty gnące



$$\Sigma F_Y = 0$$

$$R_a - F_1 + F_2 + R_B = 0$$

$$R_B = F_1 - R_a - F_2$$

$$R_B = 600 \text{ KG} - 100 \text{ KG} - R_A$$

$$\Sigma M_A = F_1 a - F_2 3a - R_B 4a$$

