

Moduł 1

Wiadomości wstępne z mechaniki technicznej

1. Rys historyczny
2. Teoretyczne modele ciał
3. Działy mechaniki technicznej
4. Jednostki miar wielkości mechanicznych
5. Podział wielkości mechanicznych
6. Właściwości wektorów
7. Działania na wektorach
8. Podstawowe własności siły – rodzaje sił
9. Układy sił i ich podział
10. Więzy – reakcje więzów
11. Bibliografia

1. Rys historyczny

Mechanika jest nauką o ruchu ciał materialnych oraz o wzajemnym oddziaływaniu mechanicznym tych ciał.

Ruch jest najprostszym i najczęstszym ze zjawisk w przyrodzie. Przez ruch rozumie się zmianę położenia ciała materialnego względem innych ciał materialnych, które wzajemnego położenia nie zmieniają, czyli pozostających w spoczynku. Spoczynek jest więc niejako szczególnym przypadkiem ruchu. Ruch jest pojęciem względnym. Powiedzenie: „to się porusza, a to jest w spoczynku” nabiera sensu dopiero wtedy, gdy jednoznacznie określimy, do jakiego układu ciał odnosimy rozważany ruch. Układ, względem którego rozpatrujemy jakiś ruch, nazywamy **układem odniesienia**.

Omawiając ruchy, z którymi mamy najczęściej do czynienia w życiu codziennym, za układ odniesienia przyjmujemy Ziemię lub ciała z nią związane (drzewa, domy itp.). W niektórych przypadkach wygodniej jest obrać inny układ odniesienia. Chcąc opisać ruch pasażera po poruszającym się statku, za układ odniesienia obierzemy pokład statku. Ruch ciał niebieskich do XV wieku opisywano względem Ziemi (tzw. układ Ptolemeusza). Nasz wielki uczony Mikołaj Kopernik (1473–1543 r.) pierwszy dowiódł, że ruchy ciał niebieskich o wiele łatwiej jest opisać, jeżeli za układ odniesienia przyjmujemy Słońce.

Ruch, to najczęstsze zjawisko w przyrodzie, interesował ludzkość od dawna. Początki mechaniki sięgają więc zamierzchłych czasów. Była jednak ona wtedy zbiorem doświadczeń bez podbudowy teoretycznej. Dopiero odkrycia Arystotelesa (384–322 r. przed n.e.), Archimedes (287–212 r. przed n.e.) i Herona (około 100 r. przed n.e.) uczyniły z niej naukę ścisłą, opartą na rozważaniach teoretycznych.

Właściwy rozwój mechaniki przypada na czasy nowożytne. Wielki geniusz epoki Odrodzenia, Leonardo da Vinci (1452–1519 r.), oprócz nauk humanistycznych, żywo interesował się zagadnieniami mechanicznymi. Tworzył liczne projekty ciekawych mechanizmów. Innym wielkim uczonym, którego prace wpłynęły na rozwój mechaniki, był Galileusz (1564–1642 r.), który sformułował między innymi powszechnie dziś znane prawo swobodnego spadania.

Podstawowe prawa mechaniki sformułował wielki angielski uczony, fizyk i matematyk, Izaak Newton (1642–1727 r.). W pracy „Matematyczne prawa naturalnej filozofii”, wydanej w 1687 r., są zawarte zasadnicze prawa mechaniki, którą nazywamy **mechaniką klasyczną** lub niutonowską.

Mechanika klasyczna była rozwijana przez wielu uczonych XVIII, XIX i XX wieku. Do największych należą: Lagrange, Hamilton, Jacobi, Euler, d'Alembert. Należy podkreślić duży wkład wniesiony do rozwoju mechaniki przez polskich uczonych. Są to przede wszystkim: S. Drzewiecki, F. Kucharzewski, J. N. Franke, Z. Straszewicz, S. Banach oraz M. T. Huber, twórca polskiej szkoły mechaniki ciała stałego. Prace tych uczonych, profesorów naszych wyższych uczelni, przyczyniły się znacznie do rozwoju mechaniki i przysporzyły dużo sławy polskiej nauce.

Mechanika klasyczna panowała niepodzielnie od czasów Newtona przez półtora wieku, póki nie stwierdzono, że pewnych faktów, np. niektórych ruchów ciał niebieskich, nie można objaśnić na podstawie praw nią rządzących. Rozbieżność pomiędzy teorią, a obserwacją doprowadziła do powstania na przełomie XIX i XX wieku nowej nauki, **mechaniki relatywistycznej** (Einsteina), opartej na względności czasu i przestrzeni.

Dalszy rozwój techniki i nauk przyrodniczych doprowadził do wykrycia m.in. złożonej struktury atomu. Ruchy poszczególnych cząstek, z których składają się atomy, nie

dały się opisać na podstawie zasad mechaniki klasycznej i relatywistycznej. Doprowadziło to do powstania w latach trzydziestych naszego stulecia nowej nauki, zwanej **mechaniką kwantową**. Opiera się ona na sformułowaniach Bohra i Plancka, którzy przyjęli założenie, że energia nie jest ciągła, lecz ma jakby „ziarnistą” budowę. Może być pochłaniana i wysyłana jedynie w całkowitych „porcjach”. **Kwant** – to właśnie taka najmniejsza porcja energii. Ciepło, promieniowanie, elektryczność, magnetyzm – to różne formy energii.

Mechanika kwantowa umożliwia rozpatrywanie i opisywanie zjawisk świata atomowego. W przeciwieństwie do mechaniki klasycznej, za pomocą której możemy badać i opisywać zjawiska dotyczące ciał makroskopowych (aż do molekuł), mechanika kwantowa daje nam możliwość opisywania zjawisk mikroskopowych. Zresztą i niektóre zjawiska makroskopowe można wytłumaczyć jedynie na drodze mechaniki kwantowej. Należy tu np. nadprzewodnictwo metali w niskich temperaturach czy nadpłynność (brak lepkości) niektórych ciekłych gazów (helu).

Do początku XX wieku mechanika klasyczna była podstawą do wyjaśniania wszystkich zjawisk zachodzących we wszechświecie. Dziś przy analizowaniu tych zjawisk korzystamy ponadto z mechaniki relatywistycznej i kwantowej. Warto nadmienić, że badania w dziedzinie mechaniki relatywistycznej i kwantowej nie zostały jeszcze zakończone.

Podstawą tej nowej mechaniki stały się dwie rewolucyjne na ówczesne poglądy teorie ogłoszone przez Alberta Einsteina (1879–1955 r.). Pierwsza z nich, opublikowana w 1905 r., nosi nazwę „Teoria względności szczególnej”. Formułuje w niej A. Einstein zasadę równoważności masy i energii. Zasada ta stała się podstawą odkrycia i zastosowania energii jądrowej.

W 1914 r. ogłasza Albert Einstein „Teorię względności ogólną”. Poddaje w niej rewizji niutonowską teorię grawitacji. Nowa teoria została w późniejszych latach potwierdzona doświadczalnie. Wnioski z niej wypływające zostały sprawdzone w ruchu planety Merkury. Również sprawdzony został wniosek wynikający z ogłoszonej teorii o zakrzywieniu promieni świetlnych w polu grawitacyjnym Słońca.

Jednym z wielkich kontynuatorów prac Alberta Einsteina (ur. w 1942 r.) jest naukowiec Stephen Hawking, brytyjski astrofizyk, kosmolog, fizyk teoretyk. W ciągu trwającej ponad 40 lat kariery zajmował się głównie czarnymi dziurami i grawitacją kwantową. Opracował wspólnie z Rogerem Penrose'em twierdzenia odnoszące się do istnienia osobliwości w ramach ogólnej teorii względności oraz teoretyczny dowód na to, że czarne dziury powinny emitować promieniowanie. Godne polecenia są jego popularnonaukowe książki będące światowymi bestsellerami, m.in. „Krótka historia czasu. Od wielkiego wybuchu do czarnych dziur”. Książka ta wyjaśnia czytelnikowi niezaznajomionemu z dokonaniem współczesnej nauki najnowszych osiągnięć z dziedziny fizyki (m.in. mechaniki), astronomii i kosmologii. Autor próbuje odpowiedzieć na pytania o początek i koniec Wszechświata oraz o naturę czasu, a także o ostateczne granice ludzkiego poznania.

Rozwijanie się mechaniki relatywistycznej i kwantowej świadczy o tym, że prawa mechaniki klasycznej są niewystarczające do opisu wszystkich ruchów spotykanych w przyrodzie. Nasuwa się więc pytanie: gdzie leży granica stosowalności praw i zasad mechaniki klasycznej? W jakich granicach obliczenia wykonane za pomocą mechaniki klasycznej będą wystarczająco dokładne, a kiedy należy odnieść się do praw mechaniki relatywistycznej i kwantowej?

Okazuje się, że zależy to od stosunku prędkości opisywanego ruchu do prędkości światła ($c = 300000 \text{ km/s}$). Największe spotykane dziś w technice prędkości (samoloty

odrzutowe, pociski, rakiety, sztuczne satelity) wynoszą 2–12 km/s. Stosunek tych prędkości do prędkości światła jest znikomo mały. Nawet, gdy postęp techniki umożliwi w przyszłości uzyskiwanie prędkości setki razy większych, będą one nadal bardzo małe w porównaniu z prędkością światła. Przy opisywaniu zjawisk makroskopowych zachodzących z prędkościami bardzo małymi w porównaniu z prędkością światła możemy w całej rozciągłości stosować prawa mechaniki klasycznej, a otrzymane wyniki są tak dokładne, że praktycznie nie ma możliwości stwierdzenia różnicy.

2. Teoretyczne modele ciał

Mechanika jest nauką o ruchu ciał w przestrzeni i w czasie, bez względu na stan skupienia, w jakim te ciała w przyrodzie występują. Zakres mechaniki technicznej, którym zajmuje się ten kurs obejmuje tylko ciała stałe.

Rzeczywistość – to, co nas otacza – jest najczęściej mocno skomplikowana. Chcą ją opisać, musimy uciekać się do pewnych uproszczeń. Uproszczenia te nazywane **modelami**.

Najprostszym modelem ciała jest **punkt materialny**. Jest to punkt geometryczny, w którym jest skupiona cała masa m ciała. Punktem materialnym możemy zastępować każde ciało rzeczywiste o małych wymiarach, a także ciało o dużych wymiarach, o ile tylko te wymiary będą małe w porównaniu z wymiarami toru, po którym się to ciało porusza. Tak więc w pewnych rozważaniach jadący po szosie samochód czy płynący po morzu statek możemy zastąpić jednym punktem materialnym, który będzie miał masę równą masie danego ciała. W wielu zagadnieniach punktem materialnym zastępujemy Ziemię w jej ruchu dookoła Słońca.

Drugim modelem w mechanice jest **ciało sztywne**. Jest to układ punktów materialnych niezmiennie ze sobą związanych. W ciele sztywnym odległości poszczególnych punktów od siebie pozostają w czasie ruchu nie zmienione. Również dowolne siły przyłożone do takiego ciała nie zmieniają odległości pomiędzy jego poszczególnymi punktami. Zachowaniem się ciał materialnych spotykanych w zastosowaniach technicznych zajmuje się mechanika stosowana lub mechanika techniczna.

Pod wpływem sił zewnętrznych ciała rzeczywiste zmieniają nieco swój kształt, czyli odkształcają się. Zachowanie się ciał rzeczywistych podczas działania na nie sił są opisywane za pomocą dwóch modeli.

Pierwszy z nich to **ciało sprężyste**. Jest to ciało, które pod wpływem sił zewnętrznych odkształca się, lecz po odciążeniu powraca do swoich pierwotnych wymiarów. Odkształcenie ciała sprężystego pojawia się w chwili obciążenia i zanika po odciążeniu ciała.

Bardziej zbliżony do ciała rzeczywistego jest drugi model ciała odkształcalnego, zwany **ciałem sprężysto-plastycznym**. Jest to ciało, które pod wpływem obciążenia odkształca się, a po odciążeniu nie powraca do wymiarów początkowych. Odkształcenie takiego ciała jest sumą dwóch odkształceń: sprężystego (przemijającego po odciążeniu) i plastycznego, czyli trwałego (pozostającego po odciążeniu ciała).

W mechanice technicznej posługujemy się czterema modelami teoretycznymi. Są to:

- punkt materialny,
- ciało sztywne,
- ciało sprężyste,
- ciało sprężysto-plastyczne.

3. Działy mechaniki technicznej

Kurs podstaw mechaniki technicznej składa się z czterech części. Są to: statyka, wytrzymałość materiałów, kinematyka i dynamika.

Statyka zajmuje się siłami działającymi na punkt materialny lub na ciało sztywne. W szczególności zasadami równowagi sił działających na rozważany model.

W drugim dziale, czyli w **wytrzymałości materiałów** opisywane są dwa następujące zagadnienia:

- 1) czy przy określonym obciążeniu siłami zewnętrznymi dana część maszyny nie ulegnie zniszczeniu (przez zniszczenie elementu konstrukcyjnego rozumiemy nie tylko jego złamanie lub inny objaw pokonania sił spójności materiału, lecz również odkształcenie elementu przekraczające wartość założoną, podyktowaną przeznaczeniem i charakterem pracy elementu);
- 2) jakie kształty i wymiary należy nadawać elementom konstrukcyjnym i z jakiego materiału je wykonywać, aby zapewnić im odpowiednią trwałość i zachować oszczędności i lekkości konstrukcji.

Kinematyka, nazywana geometrią ruchu dotyczy ruchu punktu i ciała sztywnego. Przy kinematycznym opisywaniu ruchu nie bierze się pod uwagę przyczyn powodujących ruch, ani masy poruszającego się ciała. Zajmuje się tylko charakterystycznymi wielkościami mechanicznymi, opisującymi samo zjawisko ruchu, jak: droga, czas ruchu, prędkość i przyspieszenie.

Część czwarta – **dynamika** – zajmuje się również zagadnieniami ruchu, lecz z uwzględnieniem przyczyn ruchu i wartości masy poruszającego się punktu materialnego lub ciała sztywnego. W szczególności dynamika daje odpowiedź na pytania, jaki będzie ruch rozważanego modelu, skoro działają na niego dane siły, lub odwrotnie, jakie siły muszą działać na dane ciało, aby poruszało się ono danym ruchem.

4. Jednostki miar wielkości mechanicznych

Od dawnych czasów ludzkość używała różnych jednostek miar. W 1832 roku matematyk Gauss wykazał, że wystarczy przyjąć za podstawę jednostki trzech wielkości: długości, masy i czasu. Za pomocą tych trzech jednostek można wyrazić wartości wszystkich innych wielkości mechanicznych. W ten sposób powstał układ jednostek, zwany **układem CGS**. Za podstawowe jednostki długości, masy i czasu przyjęto w tym układzie centymetr (cm), gram (g) i sekundę (s).

Szybki rozwój techniki stworzył konieczność wprowadzenia takiego układu jednostek, który byłby stosowany powszechnie na całym świecie. W 1960 roku Międzynarodowa Konferencja Miar przyjęła tzw. międzynarodowy układ jednostek miar. Układ ten został wprowadzony w życie w wielu krajach, w tym również w Polsce. Nazywa się go **układem SI** (*System International d'Unités*).

Za podstawowe jednostki długości, masy i czasu przyjęto w tym układzie metr (m), kilogram (kg) i sekundę (s). Układ SI zakłada siedem podstawowych jednostek. Cztery następne, tj.: jednostka temperatury, natężenie prądu, światłość oraz ilość substancji, nie są stosowane (może poza jednostką temperatury w pewnym zakresie) w mechanice technicznej.

Tabela 1.1. Ważniejsze jednostki SI używane w mechanice technicznej

Jednostki podstawowe				
Lp.	Wielkość	Jednostka		
		Nazwa	Oznaczenie	
1.	Długość	metr	m	
2.	Masa	kilogram	kg	
3.	Czas	sekunda	s	
Jednostki pochodne				
Lp.	Wielkość	Jednostka		Wymiar
		Nazwa	Oznaczenie	
1.	Prędkość liniowa	metr na sekundę	m/s	m/s
2.	Prędkość kątowna	radian na sekundę	rad/s	1/s
3.	Przyspieszenie liniowe	metr na kwadrat sekundy	m/s ²	m/s ²
4.	Przyspieszenie kątowe	radian na kwadrat sekundy	rad/s ²	1/s ²
5.	Moment bezwładności pola powierzchni	metr do czwartej potęgi	m ⁴	m ⁴
6.	Masowy moment bezwładności	kilogram razy metr kwadratowy	kg · m ²	kg · m ²
7.	Siła	niuton	N	kg · m/s ²
8.	Moment siły	niutonometr	N · m	kg · m ² /s ²
9.	Naprężenie	paskal	Pa	kg · /(m · s ²)
10.	Pęd	kilogram razy metr na sekundę	kg · m/s	kg · m/s
11.	Impuls siły (popęd)	niutonosekunda	N · s	kg · m/s
12.	Stała sprężyny	niuton na metr	N/m	kg/s ²
13.	Praca, energia	dżul	J	kg · m ² /s ²
14.	Moc	wat	W	kg · m ² /s ³
15.	Kręt (moment pędu)	kilogram razy metr kwadratowy na sekundę	kg · m ² /s	kg · m ² /s

Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 15

Układ SI zawiera dwie uzupełniające jednostki miar: radian do pomiarów kąta płaskiego i steradian do pomiarów kąta bryłowego.

Ze względów praktycznych stosowane są również wielokrotności lub podwielokrotności jednostek podstawowych i pochodnych. Krotności jednostek miar tworzy się przez dodanie do jednostki podstawowej (lub pochodnej) odpowiedniego przedrostka.

Tabela 1.2. Przedrostki do tworzenia krotności jednostek miar podwielokrotnych

Przedrostek	Skrót	Mnożnik		
		ułamek zwykły	ułamek dziesiętny	potęga liczby 10
decy	d	$\frac{1}{10}$	0,1	10^{-1}
centy	c	$\frac{1}{100}$	0,01	10^{-2}
mili	m	$\frac{1}{1000}$	0,001	10^{-3}
mikro	μ	$\frac{1}{1000000}$	0,000001	10^{-6}
nano	n	$\frac{1}{1000000000}$	0,000000001	10^{-9}
piko	p	$\frac{1}{1000000000000}$	0,000000000001	10^{-12}
femto	f	$\frac{1}{1000000000000000}$	0,000000000000001	10^{-15}
atto	a	$\frac{1}{1000000000000000000}$	0,000000000000000001	10^{-18}

[Źródło: opracowanie własne]

Tabela 1.3. Przedrostki do tworzenia krotności jednostek miar wielokrotnych

Przedrostek	Skrót	Mnożnik	
		wielokrotność	potęga liczby 10
deka	da	10	10^1
hekto	h	100	10^2
kilo	k	1000	10^3
mega	M	1000000	10^6
giga	G	1000000000	10^9
tera	T	1000000000000	10^{12}

[Źródło: opracowanie własne]

5. Podział wielkości mechanicznych

W mechanice technicznej stosuje się różne wielkości fizyczne, takie jak czas, siła, praca, przyspieszenie.

Wszystkie wielkości stosowane w mechanice można podzielić na dwie grupy:

- wielkości skalarowe (bezkierunkowe), czyli skalary,
- wielkości wektorowe (kierunkowe), czyli wektory.

Skalar to taka wielkość mechaniczna, którą możemy jednoznacznie określić przez podanie jej wartości liczbowej (wraz z jednostką). Wartość liczbową może być przedstawiona za pomocą punktu na przyjętej osi liczbowej. Skalarami są takie wielkości mechaniczne, jak: czas, masa, temperatura, praca, moc i inne.

Wektor to taka wielkość mechaniczna, którą można przedstawić za pomocą usytuowanego w przestrzeni odcinka mającego określony kierunek i zwrot. Prosta l , na której dany wektor leży, nazywamy **linią działania wektora**. Punkt A nazywamy początkiem, punkt B zaś końcem tego wektora. Zwrot wektora zaznaczamy grotem umieszczonym na końcu wektora. Jeżeli $A = B$, to wektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ nazywamy wektorem zerowym.

Rys. 1.1. Wektor zerowy



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 17

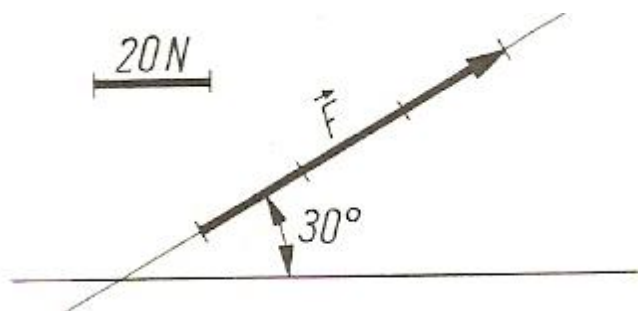
6. Właściwości wektorów

W mechanice do wielkości wektorowych należą: siła, prędkość, przyspieszenie, naprężenie i inne wielkości.

Każdy wektor ma trzy zasadnicze cechy: wartość, kierunek i zwrot. Wartością wektora nazywa się długość odcinka AB przedstawiającego ten wektor. Długość ta jest skalarą i można ją określić jedną liczbą nieujemną. Kierunek wektora określa linia jego działania. Najczęściej określa się kierunek wektora w ten sposób, że podaje się kąt, jaki tworzy linia działania z pionem lub poziomem, albo kąty, jakie ta linia tworzy z przyjętymi osiami współrzędnych. Zwrot wektora, zaznacza się grotem.

Nie należy mylić kierunku wektora ze zwrotem. Wszystkie wektory, których linie działania są do siebie równoległe, mają jednakowe kierunki, jednak mogą mieć przeciwne zwroty.

Rys. 1.2. Wektor siły



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 18

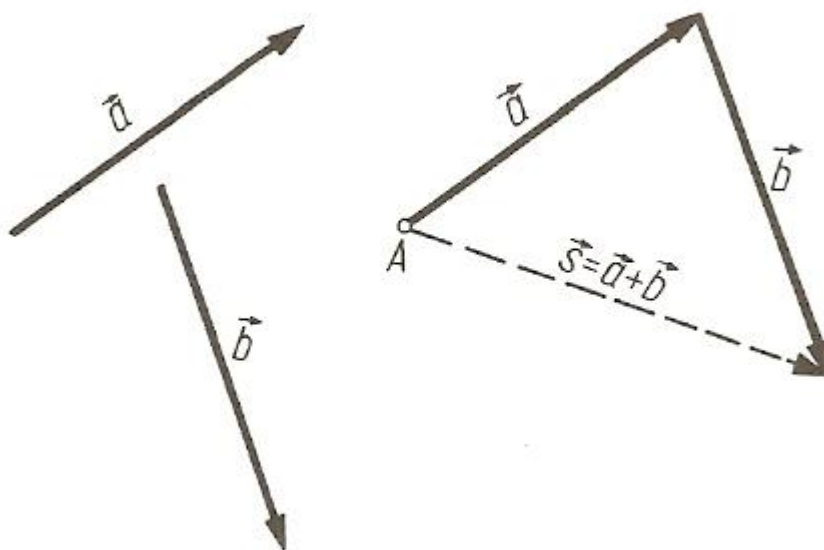
Na rys. 1.2 znajduje się wektor $\vec{F}$ przedstawiający siłę. Wartość tej siły wynosi 60 N. Jej kierunek tworzy z poziomem kąt 30° . Siła jest zwrócona do góry.

Przy zapisywaniu wektorów będziemy umieszczać nad ich symbolami poziomą strzałkę. Symbol bez strzałki będzie przedstawiać jedynie wartość danego wektora. Tak np. $\vec{F}$ oznaczać będzie wektor siły o pewnej wartości, kierunku i zwrocie, F bez strzałki u góry będzie oznaczać wartość liczbową tej siły, wyrażoną np. w niutonach (N).

7. Działania na wektorach

- Dodawanie i odejmowanie wektorów

Rys. 1.3. Wielobok sił



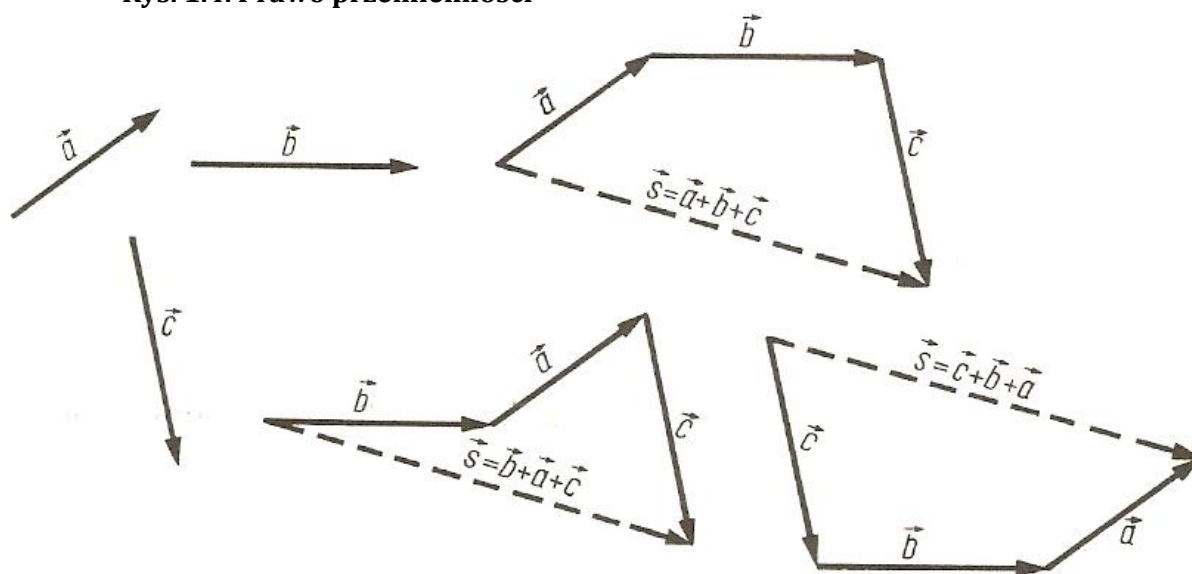
Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 19

Na rysunku 1.3. przedstawiono dwa wektory: $\vec{a}$ i $\vec{b}$. W celu znalezienia sumy tych dwóch wektorów przenosimy początek jednego z wektorów (np. wektora $\vec{a}$) do dowolnego punktu A. Do końca tego wektora przenosimy początek drugiego wektora $\vec{b}$. Wektor $\vec{s}$ łączący początek pierwszego wektora z końcem wektora drugiego, nazywamy **sumą** tych wektorów. Otrzymaną przy dodawaniu linię łamaną nazywamy **wielobokiem** wektorów. W szczególnym przypadku, gdy dodawanymi wektorami będą siły, wielobok nazwiemy **wielobokiem sił**. Podobnie przy dodawaniu wektorów prędkości otrzymujemy wielobok prędkości, przy dodawaniu przyspieszeń – wielobok przyspieszeń.

W przypadku większej liczby wektorów postępujemy podobnie.

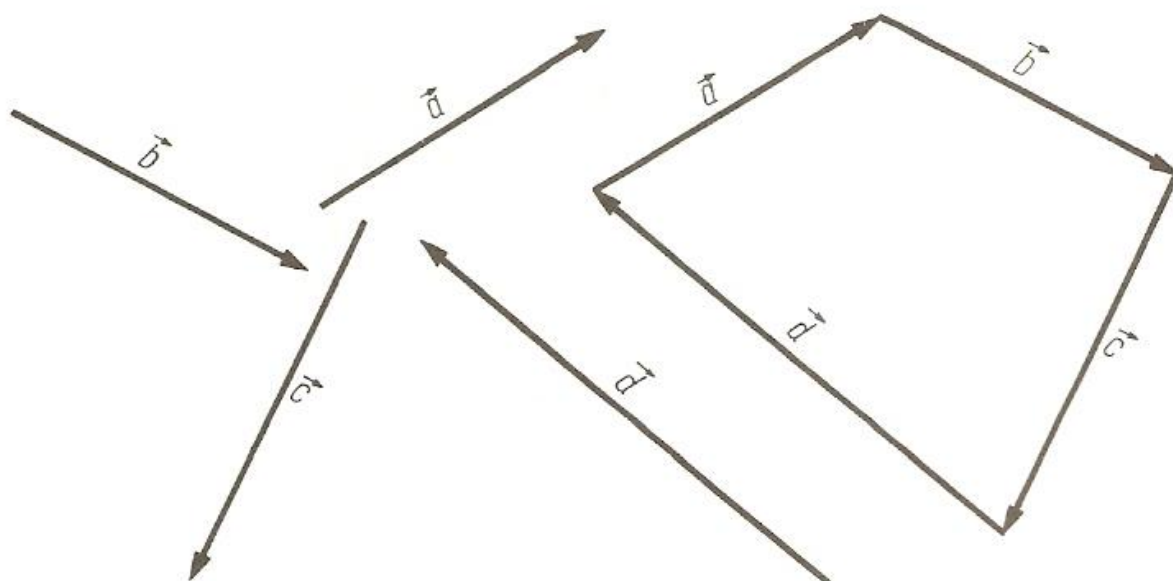
Na rys. 1.4. przedstawiono trzy wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Za pomocą wieloboku znaleziono ich sumę $\vec{s}$. Na rysunku przedstawiono trzy wieloboki. W każdym z nich przyjęto inną kolejność dodawania wektorów. Otrzymana suma w każdym przypadku jest taka sama, inny jest tylko kształt wieloboku. Dodawanie wektorów podlega prawu przemienności. Kolejność kreślenia wektorów w wieloboku nie wpływa na wynik dodawania.

Rys. 1.4. Prawo przemienności



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 19

Rys. 1.5. Wielobok zamknięty



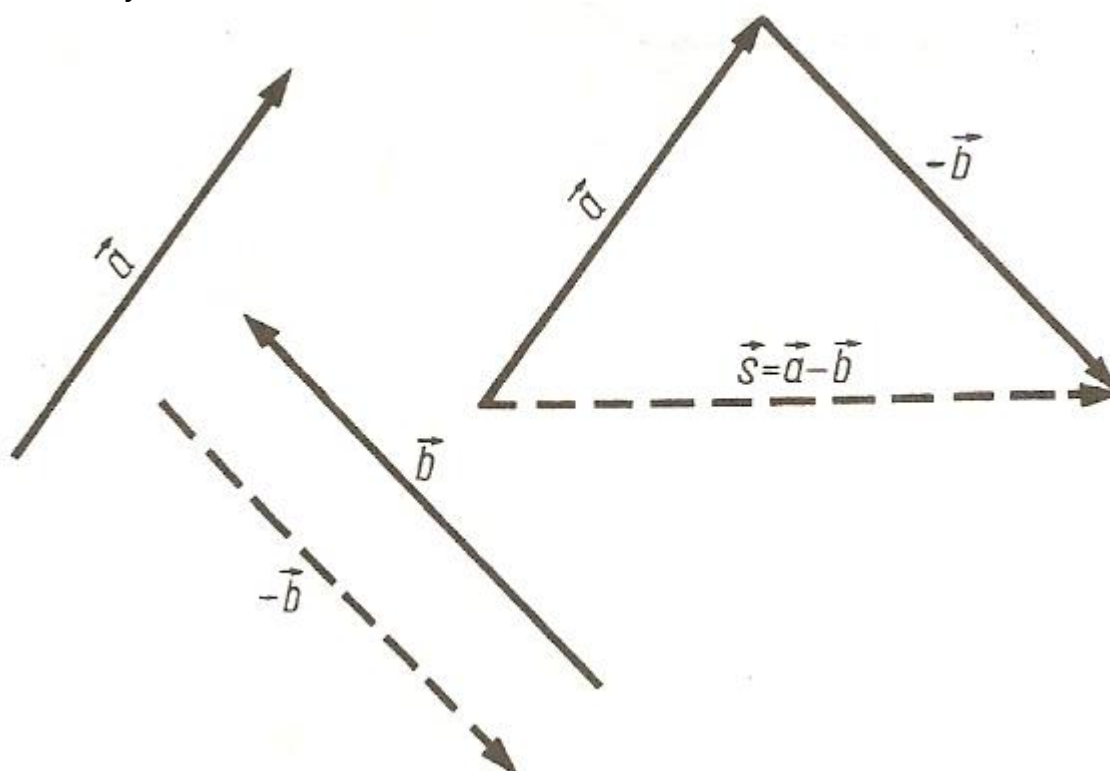
Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 20

Na rys. 1.5 można stwierdzić, że suma kilku wektorów jest wektorem zerowym tylko wtedy, gdy początek pierwszego wektora i koniec wektora ostatniego znajdują się w tym samym punkcie. Taki wielobok wektorów nazywamy **wielobokiem zamkniętym**. Możemy więc powiedzieć, że suma geometryczna dowolnej liczby wektorów jest równa zero wtedy, gdy wektory te tworzą wielobok zamknięty.

Odejmowanie wektorów jest działaniem odwrotnym do dodawania. Biorąc pod uwagę, że $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ możemy powiedzieć, że odjąć od wektora $\vec{a}$ wektor $\vec{b}$ to znaczy do wektora $\vec{a}$ dodać wektor o wartości i kierunku takim, jak wektor $\vec{b}$, zaś o zwrocie przeciwnym (wektor $-\vec{b}$ nazywamy wektorem przeciwnym do wektora $\vec{b}$).

Rys. 1.6 przedstawia geometryczne odejmowanie dwóch wektorów. Wektor $\vec{s}$ jest różnicą dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rys. 1.6.



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 20

• Mnożenie i dzielenie wektora przez skalar

Dany jest wektor $\vec{a}$ i dowolny skalar n . Pytanie brzmi, co uzyskamy w przypadku pomnożenia tego skalarą przez dany wektor, czyli $n \cdot \vec{a} = ?$

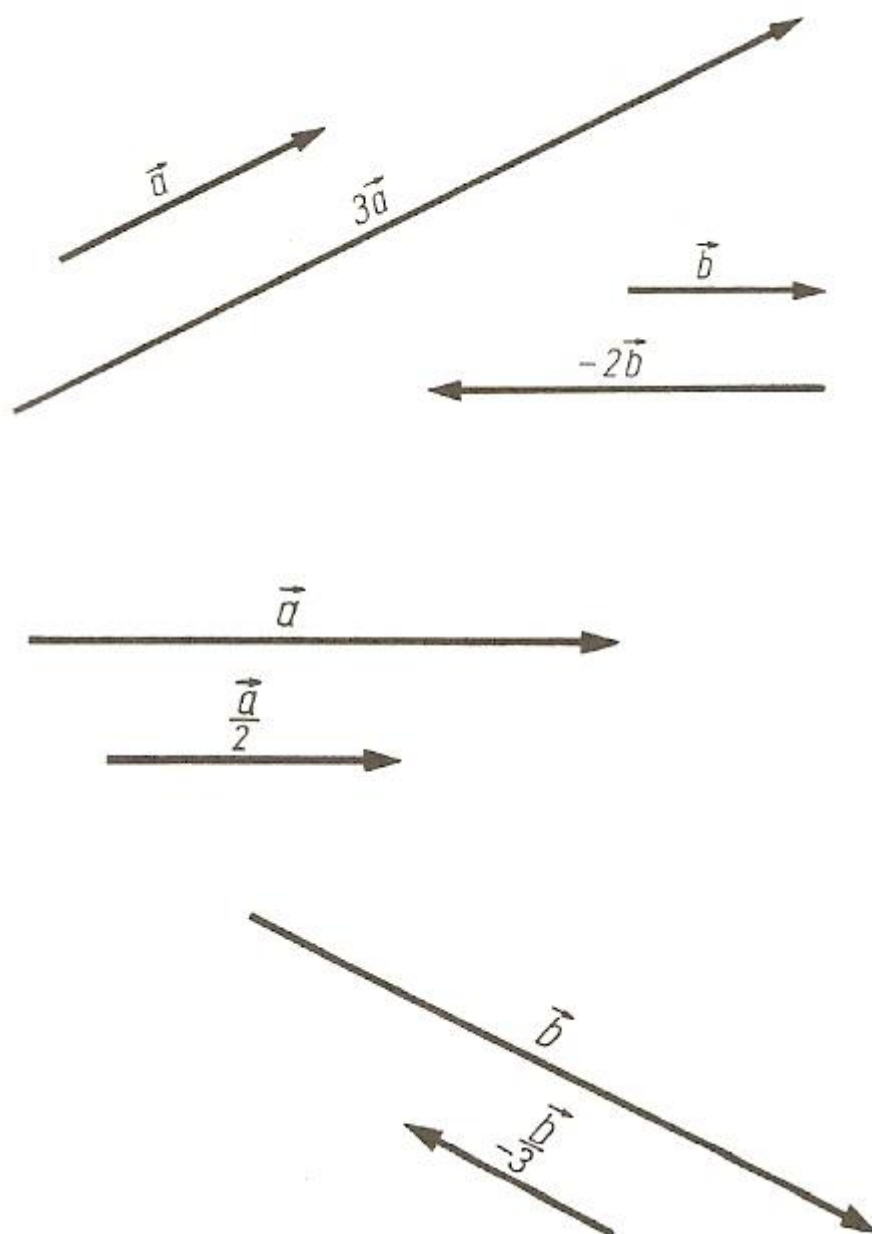
Możliwe są dwa przypadki:

- Skalar n jest większy od zera, czyli mnożymy wektor przez liczbę dodatnią. Otrzymana się wtedy wektor, który ma ten sam kierunek i zwrot, co wektor $\vec{a}$. Jego długość jest n razy większa od długości wektora $\vec{a}$.
- Skalar n jest mniejszy od zera, czyli mnożymy wektor przez liczbę ujemną. Otrzymujemy wtedy wektor, który ma ten sam kierunek, co wektor $\vec{a}$ i przeciwny do niego zwrot. Jego długość jest n razy większa od długości wektora $\vec{a}$.

Jeżeli $\vec{a} = 0$ lub $n = 0$, przyjmuje się, że $n \cdot \vec{a} = 0$.

Na rys. 1.7 przedstawiono mnożenie i dzielenie wektora przez skalary. Dzielenie wektora przez liczbę możemy uważać za mnożenie tego wektora przez odwrotność tej liczby.

Rys. 1.7. Mnożenie i dzielenie wektora przez skalary



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 21

- **Iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy dwóch wektorów**

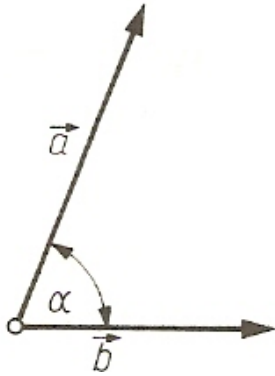
Dwa wektory można mnożyć przez siebie skalarnie i wektorowo. Dane są dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Iloczynem skalarnym tych wektorów nazywamy skalar równy iloczynowi modułów tych wektorów i cosinusa kąta zawartego między nimi.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

Iloczyn skalarny podlega prawu przemienności, czyli: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Rys. 1.8. Iloczyn wektorowy



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 22

Iloczyn skalarny równa się zero, jeżeli jeden z wektorów jest wektorem zerowym lub jeżeli rozważane wektory są prostopadłe (wtedy $\cos\alpha = 0$).

Iloczynem wektorowym dwóch wektorów nazywamy wektor mający następujące cechy:

- kierunek prostopadły do obu wektorów (prostopadły do płaszczyzny, w której leżą oba wektory),
- wartość równą iloczynowi tych wektorów i sinusa kąta zawartego między nimi:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

- zwrot taki, aby trójka wektorów (w kolejności: pierwszy wektor mnożony, drugi wektor mnożony i wektor iloczynu) tworzyła prawy układ współrzędnych. Wektor iloczynu $\vec{a} \times \vec{b}$ z rys. 1.8. jest prostopadły do rysunku i zwrócony za rysunek.

Iloczyn wektorowy nie podlega prawu przemienności, gdyż zmieniając kolejność mnożonych wektorów otrzymamy wektor iloczynu o zwrocie przeciwnym, czyli:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Iloczyn wektorowy jest wektorem zerowym, jeżeli jeden z wektorów jest wektorem zerowym lub jeżeli dwa wektory są równoległe (wtedy $\sin\alpha = 0$).

Trzy wektory $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ tworzą prawy układ współrzędnych, jeżeli z końca wektora $\vec{C}$ widzimy wektor $\vec{A}$ po stronie prawej wektora $\vec{B}$.

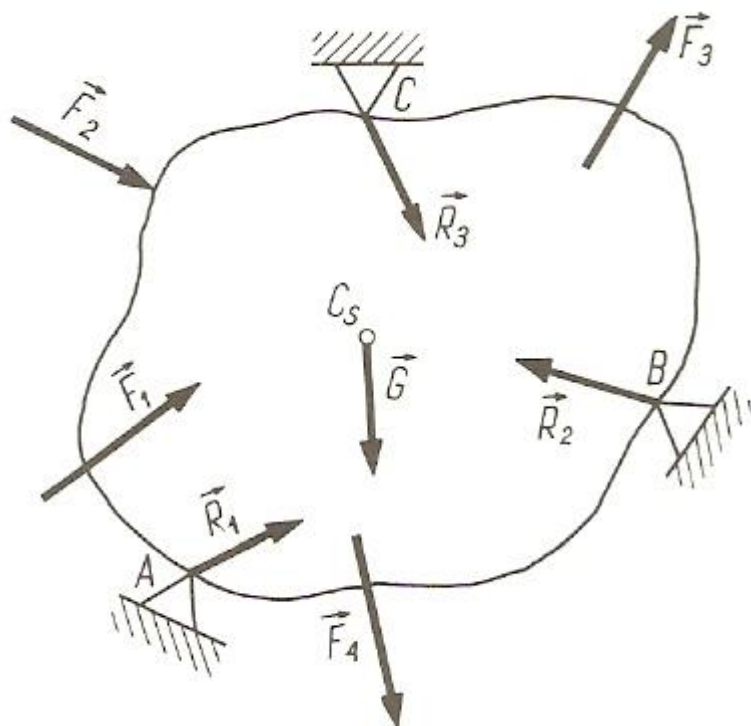
8. Podstawowe własności siły. Rodzaje sił

Siłą nazywamy mechaniczne oddziaływanie jednego ciała na drugie. Oddziaływanie to może być bezpośrednie, gdy zachodzi przy zetknięciu się ciał, lub pośrednie, objawiające się na odległość.

Jeżeli siedzimy na krześle, to bezpośrednio oddziałujemy swoją siłą ciężkości na to krzesło, ale nawet kiedy podniesiemy nogi do góry, to pośrednio (przez krzesło) oddziałujemy na podłogę. Siła jest wektorową wielkością mechaniczną. Do określenia siły należy podać następujące jej cechy: wartość, kierunek, czyli linię działania, zwrot działania oraz punkt zaczepienia.

Biorąc pod uwagę ciało o ciężarze $\vec{G}$, podparte w trzech miejscach A, B, C (rys. 1.9) i obciążone siłami F_1, F_2, F_3, F_4 w miejscach podparcia wystąpią też pewne siły R_1, R_2, R_3 (gdyż w miejscach tych następuje bezpośrednie działanie ciał na siebie). Wszystkie siły zaznaczone na rysunku, a więc F_1, F_2, F_3, F_4 oraz R_1, R_2, R_3 są działaniami pochodzącymi od innych ciał znajdujących się na zewnątrz danej bryły. Nazywamy je siłami zewnętrznymi. Siły zewnętrzne dzielimy na czynne, które dążą do wywołania ruchu lub do jego zmiany (siły F_1, F_2, F_3, F_4, G), oraz siły bierne, które przeciwdziałają ruchowi i występują w miejscach podparcia (siły R_1, R_2, R_3). Siły bierne nazywamy również reakcjami. Siły te pojawiają się w miejscach podparcia w chwili przyłożenia sił czynnych i znikają w chwili odciążenia ciała z tych sił czynnych.

Rys. 1.9. Siły zewnętrzne – czynne i bierne



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 26

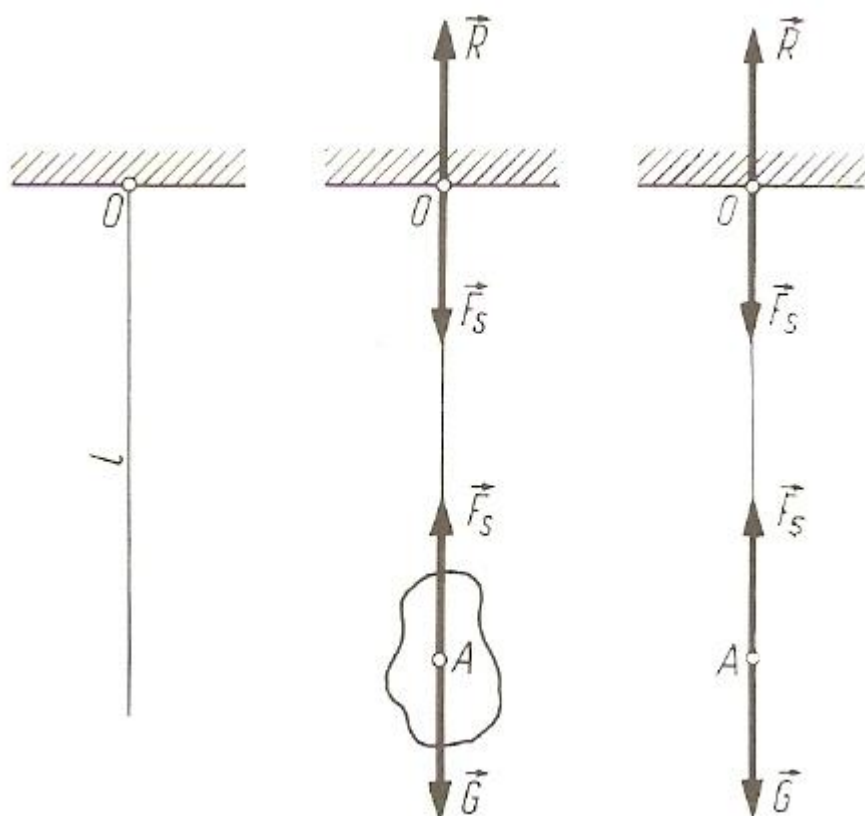
Wewnątrz każdego ciała działają również pewne siły. Są to siły wewnętrzne, które dzielimy na siły międzycząsteczkowe i napięcia. Pierwsze z nich są siłami działającymi pomiędzy poszczególnymi cząsteczkami materii. Tymi siłami mechanika techniczna nie zajmuje się. Napięcia są to siły powstałe wewnątrz ciała na skutek działania na nie sił zewnętrznych.

Rozpatrzmy następujący przykład. W punkcie 0 jest zamocowana nić o długości l . Jeżeli pominiemy ciężar własny swobodnie wiszącej nici, jedynymi siłami wewnętrznymi w nici będą siły międzycząsteczkowe. Załóżmy następnie, że na dolnym końcu nici uwiązano ciało o ciężarze $\vec{G}$. Pod wpływem siły czynnej $\vec{G}$ wewnątrz nici powstaje dodatkowa siła wewnętrzna – napięcie. W miejscu umocowania nici (punkt 0) wystąpi reakcja $\vec{R}$. Obie siły zewnętrzne $\vec{G}$ i $\vec{R}$ wzajemnie się równoważą, dzięki czemu nić jest w spoczynku. Wydzielmy z rozważanego układu punkty zamocowania nici i ciała (punkty A i 0 na rys. 1.10). Nietrudno zauważyć, że równowaga w tych punktach spowodowana jest dwiema równymi co do wartości siłami $\vec{F}$ s, mającymi zwroty przeciw-

ne. Siłę $\vec{F}_s$ działającą w nici nazywamy napięciem. Napięcia występują w ciele zawsze parami i wzajemnie się równoważą.

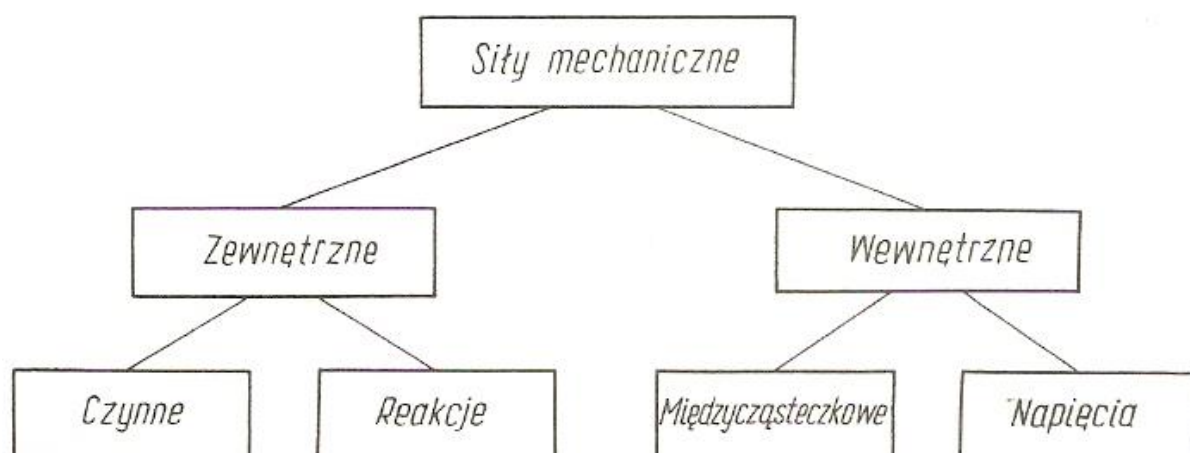
Znane są różne jednostki siły. W statyce używa się jednostek siły układu SI. W układzie tym za jednostkę przyjmujemy siłę, która masie jednego kilograma nadaje przyspieszenie 1 m/s^2 . Ta jednostka siły nazywa się niutonem (symbol N).

Rys. 1.10. Siły wewnętrzne



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 26

Schemat 1.1. Podział sił w mechanice



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 27

W układzie SI siłę ciężkości będziemy obliczali mnożąc masę ciała wyrażoną w kilogramach przez przyspieszenie ziemskie, które przyjmiemy jako stałe i równe $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, czyli $G = m \cdot g$

9. Układy sił i ich podział

Zbiór dowolnej liczby sił jednocześnie działających na ciało nazywamy **układem sił**. W zależności od położenia linii działania sił układy możemy podzielić na dwa rodzaje:

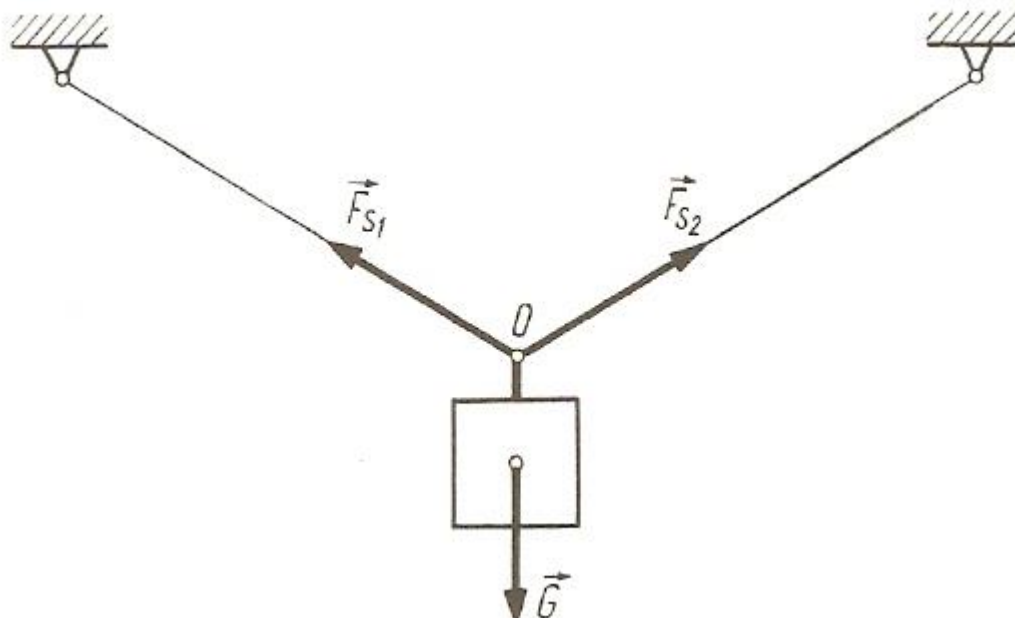
- układy płaskie,
- układy przestrzenne.

Układ płaski odznacza się tym, że wszystkie siły tworzące ten układ leżą w jednej płaszczyźnie. W mechanice technicznej często upraszcza się rzeczywistość do układów płaskich. Układy te możemy podzielić na:

- układy płaskie zbieżne,
- układy płaskie równoległe,
- układy płaskie dowolne.

Układem płaskim zbieżnym nazywamy zbiór (w jednej płaszczyźnie) sił, których linie działania przecinają się w jednym punkcie. Rys. 1.11 przedstawia ciężar wiszący na dwu linach. W punkcie O przyłożony jest układ trzech sił zbieżnych, ciężar $\vec{G}$ oraz dwie siły oddziaływania lin $\vec{F}_{S1}$ i $\vec{F}_{S2}$.

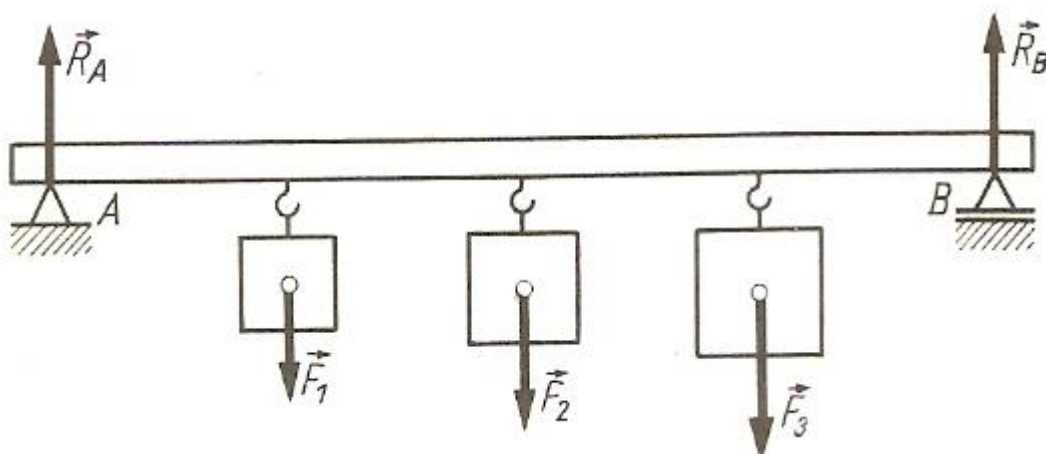
Rys. 1.11. Układ płaski zbieżny



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 28

Płaskim układem równoległym nazywamy zbiór (w jednej płaszczyźnie) sił, których linie działania są do siebie równoległe. Szczególnym przypadkiem takiego układu są siły działające wzdłuż wspólnej prostej. Na rys. 1.12 przedstawiono poziomą belkę obciążoną układem równoległym złożonym z pięciu sił (trzy siły czynne i dwie reakcje).

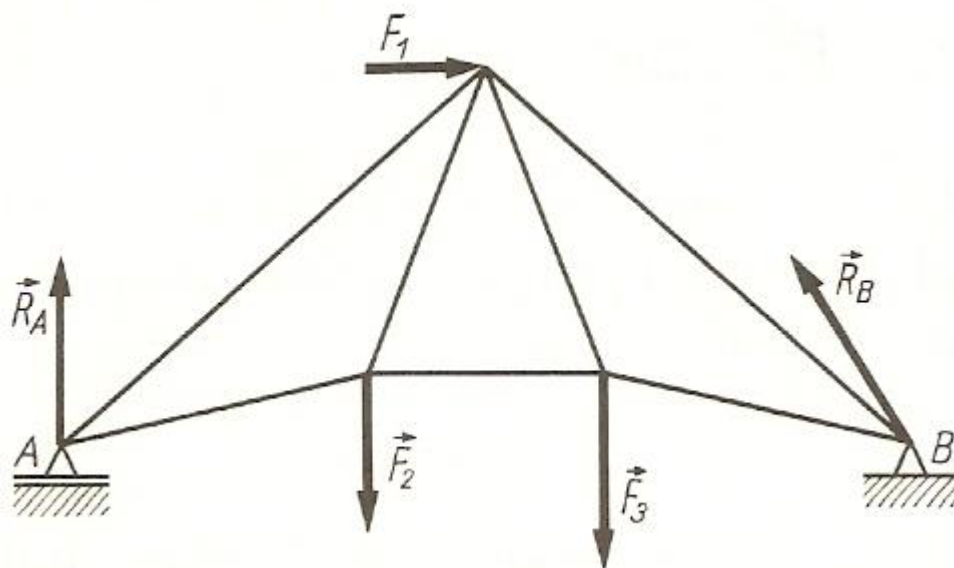
Rys. 1.12. Układ płaski równoległy



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 28

Układ płaski dowolny jest zbiorem (w jednej płaszczyźnie) sił o różnych kierunkach działania. Na rys. 1.13 przedstawiony jest więzar dachowy obciążony dowolnym płaskim układem sił.

Rys. 1.13. Układ płaski dowolny



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 28

Układ przestrzenny sił to taki, w skład którego wchodzi siły mające dowolne kierunki w przestrzeni. W układach przestrzennych również można wyróżnić trzy rodzaje układów sił: zbieżny, równoległy i dowolny.

10. Więzy. Reakcje więzów

Ciało swobodne to ciało, które może dowolnie przemieszczać się w przestrzeni. Takim ciałem jest np. lecący w powietrzu kamień lub unoszona przez wiatr kartka papieru.

Ciałem nieswobodnym nazywamy ciało, które nie może wykonywać dowolnych ruchów. Jest to ciało, którego „swoboda” została ograniczona jakimiś zewnętrznymi czynnikami. Typowe drzwi mogą wykonywać jedynie ruch obrotowy i to w pewnym wycinku, ponadto możemy je założyć lub zdjąć z zawiasów. Ruch pociągu jest ograniczony torami. Podobnie ciałem nieswobodnym jest kamień wiszący na nici, ciało leżące na jakiejś powierzchni itp.

Czynniki ograniczające swobodę ciała nazywamy **więzami**. Dla obracającego się w skrzyni biegów wału maszynowego więzami są jego łożyska. Dla przesuwającego się suportu tokarki więzami jest stół z prowadnicami. Dla wiszącego na linie ciężaru więzem jest sama lina. Dla pociągu więzami są tory, a dla leżącego na stole ciała więzem jest ten stół.

Ciało swobodne (bez więzów) ma sześć **stopni swobody**. Jest to interpretowane następująco: w przestrzennym układzie współrzędnych x, y, z ciało swobodne może przesuwać się wzdłuż osi każdej z osi x, y, z (trzy ruchy składowe) oraz może obracać się dookoła tych trzech osi (też trzy ruchy składowe). Tak więc, ciało swobodne ma 6 stopni swobody, gdyż w przestrzeni może wykonywać 6 ruchów składowych (trzy ruchy prostoliniowe i trzy ruchy obrotowe).

Wprowadzając więzy odbieramy ciału pewną liczbę stopni swobody.

Tak np. poruszający się tłok ma jeden stopień swobody (może poruszać się wzdłuż jednej osi). Również jeden stopień swobody mają wszystkie ciała obracające się dookoła stałej osi (wałki, koła zamachowe, koła zębate, tarcze szlifierskie itp.). Drzwi obracające się na zawiasach i niezabezpieczone przed ich zdjęciem mają dwa stopnie swobody. Przesuwany po stole ciężarek ma trzy stopnie swobody, bo może wykonywać trzy ruchy składowe: przesunięcia wzdłuż osi x i y oraz ruch obrotowy dookoła osi z , prostopadłej do płaszczyzny stołu.

Każde ciało działa na więzy ograniczające jego swobodę pewnymi siłami. Tak np. książka leżąca na stole działa swoją siłą na stół równą ciężarowi książki, wiszący na nici kamień napina tę nić siłą równą ciężarowi tego kamienia. Podobnie pociąg naciska na szyny, a obracający się wałek naciska z pewnymi siłami na łożysko. Zgodnie z zasadą działania i przeciwdziałania (znana z fizyki zasadą dynamiki) więzy oddziałują na ciało z siłą równą naciskowi na więzy, lecz zwróconą przeciwnie.

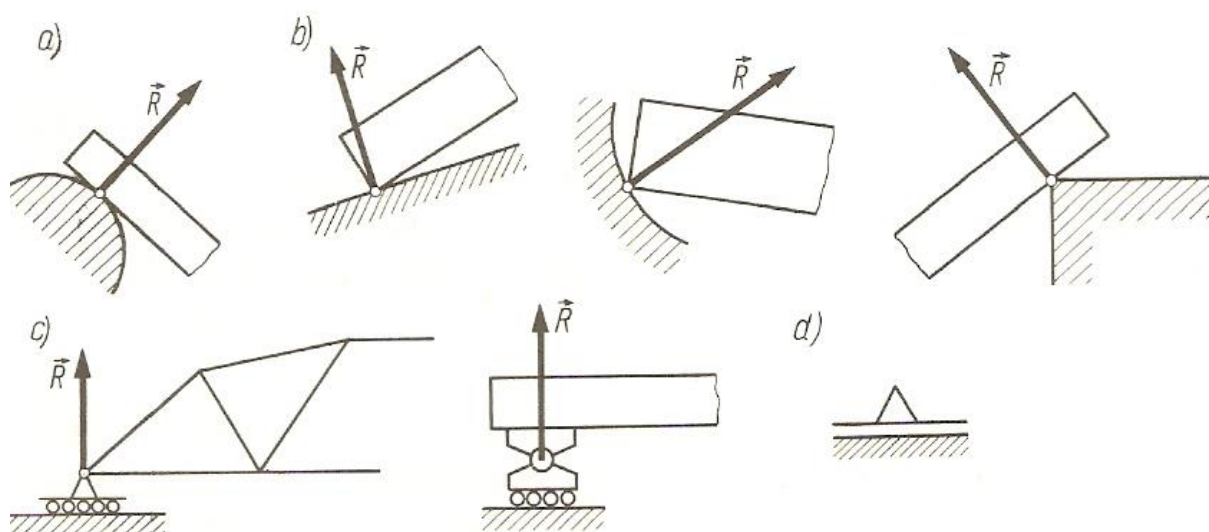
Siły, jakimi więzy oddziałują na ciało nieswobodne, nazywamy **reakcjami więzów**.

Istnieje wiele rodzajów więzów. Nie sposób wymienić wszystkich, z którymi możemy się spotkać w praktyce, jednak większość więzów można pogrupować ze względu na odbieraną ilość stopni swobody. Podstawowe grupy więzów to:

- **Podpory ruchome**

Należą do nich: podparcie na idealnie gładkiej powierzchni (rys. 1.14a), podparcie na ostrzu – pryzmie (rys. 1.14b) i podparcie w łożysku ruchomym (rys. 1.14c). Reakcja podpory ruchomej jest zaczepiona w punkcie styczności ciała z podporą i ma zawsze kierunek prostopadły do powierzchni podpierającej (niezależnie od kierunków sił działających na ciało podpierane). Podporę ruchomą oznaczamy schematycznie za pomocą trójkąta równobocznego dodatkowo podkreślonego linią, która przedstawia powierzchnię podpierającą (rys. 1.14d).

Rys. 1.14. Podpory ruchome



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 30

- **Więzy wiotkie**

Zaliczamy do nich sznury, liny, łańcuchy itp. Siła w takich więzach jest zawsze skierowana wzdłuż osi tych więzów (rys. 1.15). Podpora ruchoma i więzy wiotkie należą do więzów charakteryzujących się jedną niewiadomą siłą w podporze. W więzach tych znamy kierunek i punkt zaczepienia reakcji. Jediną niewiadomą jest wartość reakcji (zwrot reakcji, otrzymamy w toku obliczania jej wartości).

Rys. 1.15. Więzy wiotkie

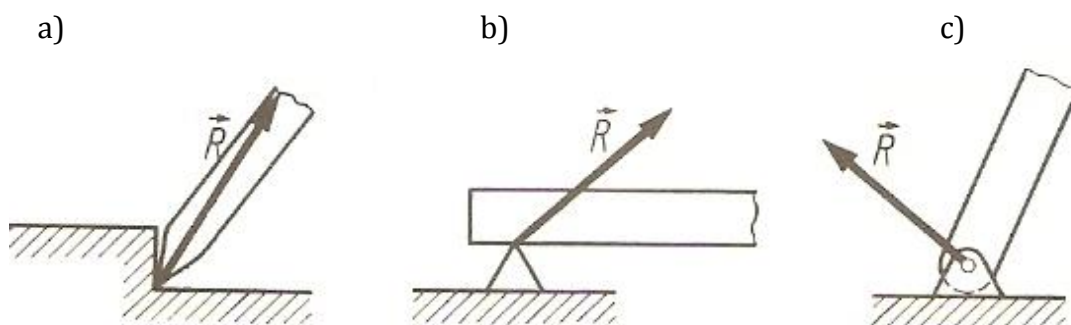


Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 31

- **Podpora stała**

Tego rodzaju więzy uniemożliwiają przesunięcie ciała, lecz umożliwiają obrót ciała wokół punktu podparcia. Na rys. 1.16 przedstawiono schematy podpór stałych. Należą do nich przede wszystkim: podpora w postaci „uskoku” (rys. 1.16a), łożysko stałe (rys. 1.16b) oraz przegub (rys. 1.16c). Reakcja w podporze stałej jest zaczepiona w punkcie styczności ciała z podporą i ma na ogół kierunek nie prostopadły do płaszczyzny ciała podpieranego. Podpora stała charakteryzuje się dwiema niewiadomymi podporowymi. W więzach tych znamy tylko punkt przyłożenia reakcji. Nie znamy natomiast jej wartości i kierunku (zwrot reakcji otrzymamy w toku obliczania jej wartości).

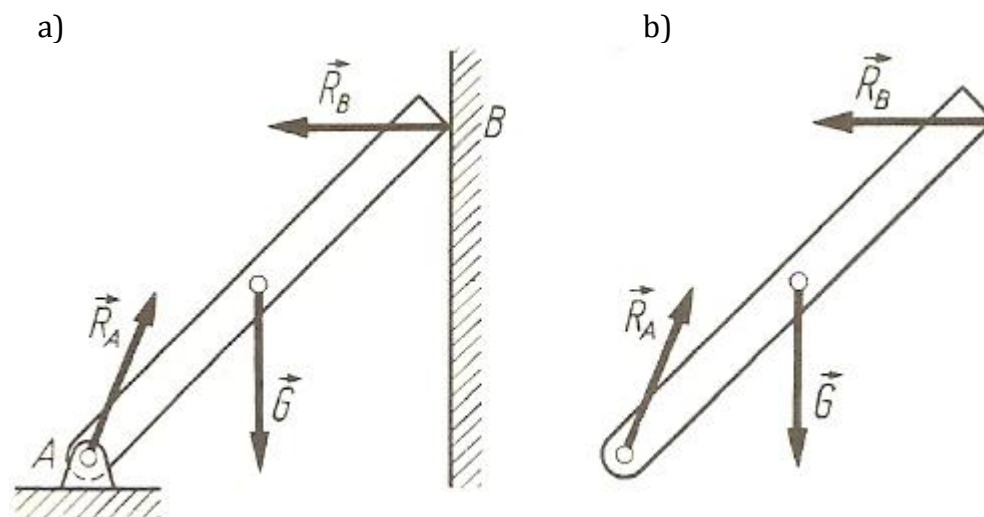
Rys. 1.16. Podpora stała



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 31

Przyjrzyjmy się prętowi o ciężarze $\vec{G}$ zamocowanemu w punkcie A przegubowo, a drugim końcem swobodnie opierającemu się o pionową ścianę (rys. 1.17a).

Rys. 1.17. Przykładowe zamocowanie pręta



Źródło: Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 2004, str. 31

Pod wpływem siły czynnej $\vec{G}$ w miejscach podparcia wystąpią reakcje $\vec{R}_A$ i $\vec{R}_B$. Rozważany pręt jest ciałem nieswobodnym, gdyż siła czynna $\vec{G}$ nie może wywołać ruchu, który by nastąpił, gdyby usunięto podpory A i B. Każda dodatkowa siła czynna również nie wywoła ruchu, lecz spowoduje zmianę reakcji w podporach. Po usunięciu jednak

podpór, a zamiast nich pozostawieniu reakcje podpór zauważamy, że nasz pręt pozostaje w spoczynku pod wpływem sił zewnętrznych nań działających (rys. 1.17b). Rozważany pręt stał się ciałem swobodnym. Każda dodatkowa siła czynna przyłożona do tego pręta wprowadzi go w ruch. Z każdego ciała nieswobodnego można uczynić ciało swobodne. Należy tylko usunąć więzy, a wprowadzić zamiast nich reakcje wywołane przez te więzy. Np. leżący na podłodze ciężar może być uważany za ciało swobodne, jeżeli zamiast podłogi przyłożymy siłę, jaką podłoga oddziałuje na dany ciężar. Podobnie za ciało swobodne można uważać obracający się wał maszyny, jeśli w miejsce usuniętych łożysk przyłożymy reakcje tych łożysk.

W technice bardzo ważnym zagadnieniem jest określenie (obliczenie) nacisku ciał na więzy (np. czopów wału na łożyska). W takim przypadku oblicza się najpierw reakcje więzów. Te zaś, zgodnie z zasadą działania i przeciwdziałania, są równe co do wielkości i kierunku szukanyemu naciskom na więzy.

Bibliografia:

1. Siuta W. (2004). Mechanika techniczna. Warszawa: WSiP
2. Siuta W., Rososiński S., Kozak B. (2008) Zbiór zadań z mechaniki technicznej. Warszawa: WSiP
3. Awrejcewicz J. (2009) Mechanika techniczna. WN-T
4. Głowacki H. (2003) Mechanika techniczna. Statyka i kinematyka. Politechnika Warszawska
5. Janicki L. Sawaniewicz Z. Poradnik – Rozwiązywanie zadań z mechaniki. Część I Statyka. REA
6. Kozak B. (2008) Mechanika techniczna. Warszawa: WSiP
7. Kozak B. (2000) Części maszyn z elementami mechaniki technicznej. WSiP
8. Misiak J. (2003) Mechanika techniczna Tom 1 Statyka i wytrzymałość materiałów. Tom 2. Kinematyka i dynamika. WN-T
9. Rutkowski A. (2009) Części maszyn. Warszawa: WSiP
10. Opracowanie zbiorowe (2008) Poradnik mechanika. REA